

Teoria dei nodi

Luca Bruni

Febbraio 2025

Origin. Dispensa prodotta in prima istanza per la Settimana Matematica, febbraio 2025.

Overview. Un percorso tra intrecci, curiosità e rompicapi, per scoprire come la matematica distingue e manipoli i nodi.

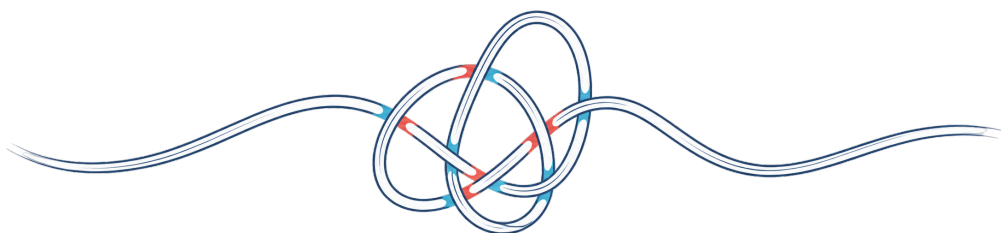
Abstract. Hai mai pensato che fare nodi potesse essere matematica? Come riesco a capire se un nodo a forma di trifoglio “coincide” con un nodo a forma di otto? In questo laboratorio scopriremo insieme come distinguere e manipolare nodi con le mosse di Reidemeister, come colorarli prima con tre colori, ma poi con un numero primo p e introdurremo alcuni invarianti per capire quale è davvero unico. Un viaggio tra intrecci, curiosità e rompicapi, perfetto per chi ama giocare con le idee e vuole sbirciare nel mondo della matematica universitaria.

Last update: 19 agosto 2026.

Menezio (Luca Bruni) · menezio96@gmail.com

Indice

1	Introduzione	2
2	Dal filo al nodo: equivalenza nello spazio	3
3	Dal nodo al diagramma	4
4	Colorare per distinguere	6
5	Il polinomio di Alexander–Conway	9
6	Chiusura	13



1 Introduzione

Un nodo si può disegnare, costruire con un filo e provare a sciogliere. Ma quando vogliamo studiarlo matematicamente nasce subito un problema: due figure molto diverse possono rappresentare lo stesso nodo, mentre due figure simili possono nascondere oggetti non equivalenti. Guardare il disegno non basta.

1.1 Obiettivo concettuale

La domanda che attraversa tutto il laboratorio è:

come possiamo dimostrare che due nodi non sono lo stesso nodo?

Per rispondere dobbiamo compiere tre passi. Prima decidiamo quali deformazioni sono consentite; poi traduciamo un oggetto nello spazio in un diagramma sul piano; infine cerchiamo proprietà che non cambiano durante le deformazioni. Queste proprietà sono gli *invarianti*.

1.2 Come si comincia

Prima delle definizioni conviene fare esperienza del problema. I tentativi, anche quelli che non funzionano, aiutano a capire quali informazioni dovremo conservare nel modello matematico.

Attività in aula

1. **Disegnare un nodo.** Ogni partecipante prova a disegnare alcuni nodi e a spiegare quando due disegni dovrebbero rappresentare lo stesso oggetto.
2. **Nodo umano.** Un gruppo forma un nodo tenendosi per mano e prova a scioglierlo senza interrompere la catena.
3. **Un filo con le estremità fissate.** Si annoda un filo, se ne fissano o si uniscono i capi e si tenta di scioglierlo. L'esperimento mette in evidenza la differenza fra una corda aperta e una curva chiusa.

1.3 Presentazione del laboratorio

Hai mai pensato che fare nodi potesse essere matematica? Come possiamo capire se un trifoglio "coincide" con un nodo a otto? Nel laboratorio impareremo a manipolare i diagrammi con le mosse di Reidemeister, a colorarne gli archi secondo regole precise e a trasformare gli incroci in equazioni. Partiremo da tre colori, passeremo alle congruenze modulo p e arriveremo al polinomio di Conway. Sarà un viaggio fra intrecci, tentativi e rompicapi, pensato per chi vuole giocare con le idee e intravedere il modo in cui lavora la matematica universitaria.

1.4 Il filo conduttore

Le parti del laboratorio non sono argomenti separati, ma tappe della stessa strategia:

1. un filo chiuso diventa un nodo nello spazio;
2. una proiezione trasforma il nodo in un diagramma;
3. le mosse di Reidemeister descrivono quando due diagrammi sono equivalenti;
4. colorazioni e polinomi forniscono strumenti per distinguere i nodi.

2 Dal filo al nodo: equivalenza nello spazio

Le attività iniziali suggeriscono che un nodo non è il suo disegno: è un oggetto nello spazio che può essere deformato senza tagliare il filo e senza farlo attraversare da sé. Rendiamo precisa questa intuizione.

2.1 Dalla curva chiusa al nodo

Intuitivamente, un nodo è un filo chiuso nello spazio. Per escludere auto-intersezioni e degenerazioni chiediamo che la circonferenza venga collocata nello spazio senza identificare punti distinti.

Definizione 1 (Nodo). *Un nodo è un embedding della circonferenza nello spazio, cioè una mappa*

$$K: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

continua e iniettiva. Con lo stesso simbolo K indicheremo spesso anche l'immagine $K(S^1)$.

Definizione 2 (Link). *Un link è un'unione finita e disgiunta di nodi. Equivalentemente, è un embedding di un'unione disgiunta di circonferenze in $\mathbb{R}^3$. Ciascuna circonferenza è detta componente del link.*

Il nodo più semplice è il *nodo banale*, rappresentabile da una circonferenza contenuta in un piano. Un nodo equivalente a esso si dice *snodabile*.

Osservazione 1. *Nel laboratorio si possono usare curve regolari o lineari a tratti. La scelta non modifica la teoria elementare sviluppata qui, ma evita esempi patologici e rende possibile lavorare con diagrammi finiti.*

2.2 Isotopia e isotopia ambiente

Una deformazione del solo filo non è sufficiente se, durante il movimento, il resto dello spazio non viene controllato: comprimere o far collassare parti della curva potrebbe produrre trasformazioni che non corrispondono al gesto fisico di deformare un filo annodato.

Definizione 3 (Isotopia di embedding). *Siano $K_0, K_1: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ due nodi. Un'isotopia tra K_0 e K_1 è una mappa continua*

$$F: S^1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che $F(\cdot, 0) = K_0$, $F(\cdot, 1) = K_1$ e, per ogni $t \in [0, 1]$, la mappa $F_t = F(\cdot, t)$ sia un embedding.

Definizione 4 (Isotopia ambiente). *Un'isotopia ambiente è una famiglia continua di omeomorfismi*

$$h_t: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 1],$$

con $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$. Due nodi K_0 e K_1 sono equivalenti se esiste un'isotopia ambiente tale che

$$h_1(K_0) = K_1.$$

L'isotopia ambiente formalizza l'idea di muovere il nodo trascinando con continuità anche lo spazio circostante. Non è consentito tagliare il filo, farlo passare attraverso sé stesso o schiacciare una sua parte fino a un punto.

Domande guida

Quali azioni fisiche su un filo corrispondono a un'isotopia ambiente? Quali azioni, invece, cambiano il tipo di nodo? Provate a formulare le regole prima di leggere la sezione successiva.

2.3 Nodi orientati

Definizione 5 (Orientazione). *Un nodo orientato è un nodo al quale è stato assegnato un verso di percorrenza. In un diagramma l'orientazione si indica con una freccia su uno degli archi.*

Invertire l'orientazione di K produce il nodo $-K$; riflettere il nodo in uno specchio produce il nodo K^* . Queste operazioni diventano importanti quando si studiano invertibilità e chiralità.

3 Dal nodo al diagramma

Lavorare direttamente in tre dimensioni è scomodo. Un buon diagramma deve semplificare il problema senza dimenticare l'informazione decisiva: quale tratto passa sopra e quale passa sotto a ogni incrocio.

3.1 Dal nodo nello spazio al diagramma

Per rappresentare un nodo su un foglio lo si proietta su un piano. In ogni punto doppio si interrompe il tratto che passa sotto, così da ricordare quale ramo si trova sopra e quale sotto.

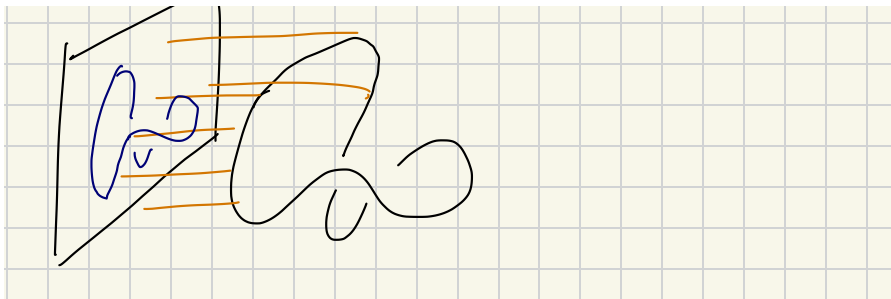


Figura 1: Proiezione di un nodo su un piano, dagli appunti manoscritti del laboratorio.

Definizione 6 (Proiezione regolare e diagramma). *Una proiezione di un nodo è regolare se:*

1. *soltanto un numero finito di punti del piano ha due controimmagini;*
2. *nessun punto ha tre o più controimmagini;*
3. *in ogni punto doppio i due rami si incontrano trasversalmente, cioè non sono tangenti.*

Un diagramma di nodo è una proiezione regolare corredata, a ogni incrocio, dell'informazione sopra/sotto.

Osservazione 2. *Se una proiezione non è regolare, basta in genere cambiare di poco il punto di vista per eliminare sovrapposizioni multiple e tangenze. Questa è la ragione geometrica per cui i diagrammi regolari sono sufficienti.*

3.2 Le tre mosse

Le deformazioni di un nodo si traducono, sul diagramma, in isotopie del piano e in tre modifiche locali.

Mossa R_1 Introduce o elimina un ricciolo e un singolo incrocio.

Mossa R_2 Introduce o elimina una coppia di incroci formata da due rami sovrapposti.

Mossa R_3 Fa scorrere un ramo oltre un incrocio tra altri due rami, senza cambiare il numero totale di incroci.

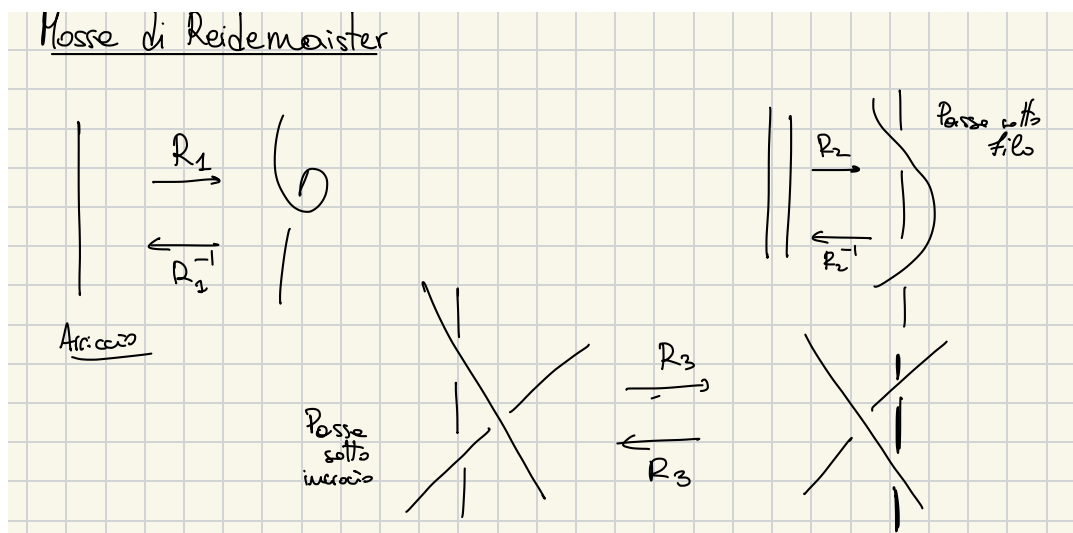


Figura 2: Le tre mosse di Reidemeister negli appunti manoscritti del laboratorio.

Definizione 7 (Equivalenza di diagrammi). *Due diagrammi sono equivalenti se uno può essere trasformato nell'altro mediante una successione finita di mosse R_1 , R_2 , R_3 .*

Teorema 1 (Reidemeister). *Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti se e solo se sono collegati da una successione finita di mosse di Reidemeister.*

Nota didattica

Questo teorema è il passaggio decisivo del laboratorio: riduce un problema topologico tridimensionale a un problema combinatorio sul piano. Da questo momento, per controllare che una regola definisca un invariante, sarà sufficiente studiare che cosa accade sotto R_1 , R_2 e R_3 .

Attività in aula

1. Riprodurre ciascuna mossa con un filo e poi disegnarla.
2. Mostrare con mosse di Reidemeister che un ricciolo isolato non cambia il tipo di nodo.
3. Cercare una sequenza di mosse che trasformi due diagrammi diversi del nodo banale l'uno nell'altro.
4. Provare a semplificare un diagramma senza sapere in anticipo se rappresenti il nodo banale.

3.3 Nodi torici

Definizione 8 (Nodo torico). *Siano p, q interi positivi coprimi. Il nodo torico $T(p, q)$ è una curva semplice chiusa tracciata sulla superficie di un toro che compie p giri in direzione meridiana e q giri in direzione longitudinale.*

Il trifoglio è il nodo torico $T(3, 2)$, a meno di scambiare le due direzioni del toro. Se $\gcd(p, q) > 1$, la curva ha più componenti e si ottiene un link torico.

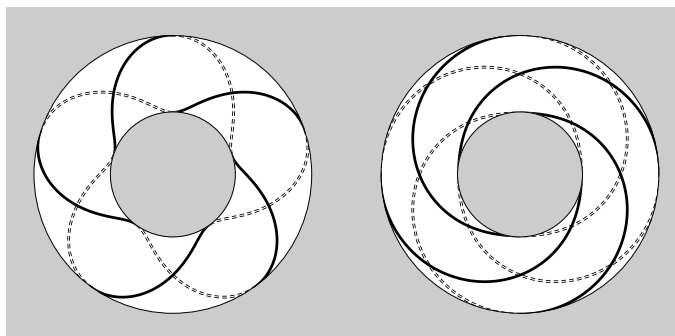


Figura 3: I nodi torici $T(5, 2)$ e $T(4, 3)$ nelle pagine di riferimento.

Attività in aula

1. Disegnare un nodo torico con cinque incroci e determinarne i parametri p e q .
2. Proporre una definizione di link torico $T(k, \ell)$ e congetturare il numero delle sue componenti.
3. Esaminare che cosa accade se si inverte l'orientazione o si prende l'immagine speculare di un diagramma.

3.4 Esercizi

Questi esercizi servono a prendere confidenza con il passaggio dallo spazio al piano e con l'uso concreto delle mosse.

Esercizio 3.1. Usando mosse di Reidemeister, mostrare che i due diagrammi del nodo banale con orientazioni opposte sono equivalenti.

Esercizio 3.2. Trovare una successione di mosse di Reidemeister che trasformi due diagrammi assegnati dello stesso nodo l'uno nell'altro. Registrare ogni passaggio e indicare il tipo di mossa usato.

Esercizio 3.3. Mostrare che invertire l'orientazione del trifoglio destro produce un diagramma equivalente al nodo di partenza. Ripetere l'esperimento per il nodo a otto.

Esercizio 3.4. Disegnare i nodi torici $T(5, 2)$ e $T(4, 3)$. Per una coppia qualsiasi (k, ℓ) , formulare una definizione di link torico e dimostrare che il numero delle componenti è $\gcd(k, \ell)$.

4 Colorare per distinguere

Le mosse di Reidemeister ci aiutano a dimostrare che due diagrammi rappresentano lo stesso nodo. Per provare che due nodi sono diversi serve invece una quantità, o una struttura, che sopravviva a tutte le mosse ammesse.

4.1 Che cos'è un invariante

Definizione 9 (Invariante). *Un invariante di nodi è una funzione I definita sui nodi tale che*

$$K \sim K' \implies I(K) = I(K').$$

Può assumere valori numerici, polinomiali, algebrici o combinatori.

Se $I(K) \neq I(K')$, allora certamente K e K' non sono equivalenti. L'implicazione inversa non è richiesta: due nodi diversi possono avere lo stesso valore dell'invariante.

Questa asimmetria è importante. Un invariante è uno strumento per certificare una differenza, non necessariamente una descrizione completa del nodo.

Nota

Il numero di incroci di un diagramma non è un invariante: una mossa R_1 lo cambia di uno e una mossa R_2 lo cambia di due. Il *numero minimo* di incroci fra tutti i diagrammi di un nodo è invece un invariante, ma è difficile da calcolare.

Domande guida

Per dimostrare che una regola definita sui diagrammi dà un invariante di nodi, che cosa bisogna controllare? Il teorema di Reidemeister suggerisce una verifica finita: studiare separatamente R_1 , R_2 e R_3 .

4.2 Le 3-colorazioni di Fox

Gli archi di un diagramma sono i tratti compresi fra due sottopassaggi consecutivi. Il ramo che passa sopra un incrocio appartiene allo stesso arco sui due lati dell'incrocio.

Definizione 10 (3-colorazione). *Una 3-colorazione di un diagramma assegna a ogni arco un elemento di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ in modo che, a ciascun incrocio, valga una delle due condizioni equivalenti:*

- *i tre colori coinvolti sono tutti uguali oppure tutti diversi;*
- *se b è il colore del ramo superiore e a, c quelli dei due rami inferiori, allora*

$$2b \equiv a + c \pmod{3}.$$

Le tre colorazioni costanti, nelle quali tutti gli archi hanno lo stesso colore, esistono per ogni diagramma e si chiamano *banali*. Una colorazione che usa almeno due colori è *non banale*.

Proposizione 1. *In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la relazione $2b \equiv a + c$ equivale alla condizione "tutti uguali oppure tutti distinti".*

Dimostrazione. Se due fra a, b, c coincidono, per esempio $a = b$, allora la relazione dà $b \equiv c$, quindi tutti e tre coincidono. Se nessuna coppia coincide, i tre valori sono necessariamente 0, 1, 2 in qualche ordine e la loro somma è 0 modulo 3; da $a + b + c \equiv 0$ segue $a + c \equiv -b \equiv 2b$. Il viceversa è immediato. $\square$

Teorema 2 (Invarianza delle colorazioni). *Il numero delle 3-colorazioni di un diagramma non cambia applicando una mossa di Reidemeister. Di conseguenza, se D e D' rappresentano lo stesso nodo,*

$$\text{card Col}_3(D) = \text{card Col}_3(D').$$

Dimostrazione. Per ciascuna mossa si costruisce una corrispondenza biunivoca tra le colorazioni prima e dopo la mossa.

- In R_1 il nuovo arco è costretto ad avere lo stesso colore dell'arco preesistente.
- In R_2 , assegnati i colori agli archi esterni, le due relazioni determinano in modo unico i colori interni; eliminando la coppia di incroci si recupera la colorazione iniziale.

- In R_3 le tre equazioni lineari prima e dopo la mossa sono equivalenti. Ogni scelta compatibile da un lato si estende quindi in modo unico dall'altro.

Il teorema di Reidemeister conclude la dimostrazione. □

Corollario 1. *Il trifoglio non è equivalente al nodo banale.*

Dimostrazione. Il nodo banale ha soltanto le tre colorazioni costanti. Un diagramma del trifoglio ha invece nove 3-colorazioni: tre costanti e sei non banali, ottenute assegnando tre colori distinti ai tre archi. I numeri di colorazioni sono diversi. □

Attività in aula

1. Trovare tutte le 3-colorazioni del nodo banale e del trifoglio.
2. Scrivere il sistema di congruenze associato a un diagramma dato.
3. Verificare direttamente l'invarianza per ciascuna delle tre mosse di Reidemeister.
4. Cercare due nodi che la 3-colorazione non riesca a distinguere. Che cosa mostra questo esempio sul significato di "invariante"?

4.3 Le p -colorazioni: dalla geometria all'algebra

Definizione 11 (p -colorazione). Sia $p \geq 2$. Se gli archi di un diagramma sono $a_1, \dots, a_n$, una p -colorazione è una soluzione in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ del sistema che, a ogni incrocio, impone

$$2b - a - c \equiv 0 \pmod{p},$$

dove b è il colore del ramo superiore e a, c sono i colori dei due rami inferiori.

Le soluzioni costanti sono sempre p -colorazioni banali. Il numero delle p -colorazioni è un invariante per lo stesso argomento usato nel caso $p = 3$.

Osservazione 3. Quando p è primo, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ è un campo e l'insieme delle colorazioni è uno spazio vettoriale: il problema si può risolvere con l'eliminazione di Gauss modulo p . Per p composto il conteggio resta un invariante, ma non si dispone in generale della stessa struttura di spazio vettoriale.

Nota didattica

Questo passaggio è un buon punto per una breve digressione sulle congruenze, sui sistemi lineari modulo p e sul teorema cinese del resto. La colorazione rende visibile il ponte fra diagrammi e algebra.

4.4 Esercizi

Qui la parte grafica diventa un sistema di congruenze: conviene disegnare il diagramma, assegnare una variabile a ogni arco e soltanto dopo iniziare i calcoli.

Esercizio 4.1. Per ciascuno dei diagrammi proposti, assegnare una variabile a ogni arco, scrivere il sistema $2b - a - c \equiv 0 \pmod{3}$ e contare le soluzioni. Separare le colorazioni banali da quelle non banali.

Esercizio 4.2. Dimostrare l'invarianza del numero di p -colorazioni sotto le tre mosse di Reidemeister. Quali passaggi dipendono dal fatto che p sia primo?

Esercizio 4.3. Trovare una coppia di nodi non equivalenti con lo stesso numero di 3-colorazioni. Spiegare perché questo non contraddice la definizione di invariante.

5 Il polinomio di Alexander–Conway

Le colorazioni sono efficaci ma non distinguono tutti i nodi. Cerchiamo quindi un invariante più ricco, capace di conservare in un polinomio le conseguenze di una modifica locale del diagramma.

5.1 La relazione skein

Consideriamo tre diagrammi orientati L_+ , L_- e L_0 che coincidono fuori da un piccolo disco. Dentro il disco, L_+ ha un incrocio positivo, L_- l'incrocio opposto e L_0 la risoluzione orientata dell'incrocio.

Definizione 12 (Polinomio di Conway). Il polinomio di Conway è l'assegnazione

$$L \mapsto \nabla_L(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

caratterizzata dalle proprietà seguenti:

1. **invarianza:** se $L \sim L'$, allora $\nabla_L = \nabla_{L'}$;
2. **normalizzazione:** per il nodo banale O vale $\nabla_O(x) = 1$;
3. **relazione skein di Conway:**

$$\nabla_{L_+}(x) - \nabla_{L_-}(x) = x \nabla_{L_0}(x).$$

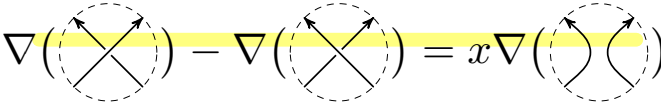
$$\nabla(L^+) - \nabla(L^-) = x \cdot \nabla(L^\circ)$$


Figura 4: I tre diagrammi locali della relazione skein nelle pagine di riferimento.

La relazione permette di sostituire un incrocio con un incrocio opposto e con una risoluzione più semplice. Ripetendo l'operazione si arriva a link banali, di cui conosciamo il polinomio.

5.2 Primi calcoli: dal nodo banale al trifoglio

Proposizione 2. Il link banale con due componenti ha polinomio di Conway nullo.

Dimostrazione. Si applica la relazione skein a un ricciolo aggiunto a un nodo banale. I diagrammi L_+ e L_- sono entrambi equivalenti al nodo banale, mentre L_0 è il link banale con due componenti. Quindi

$$1 - 1 = x \nabla_{O \sqcup O}(x).$$

Poiché $\mathbb{Z}[x]$ non ha divisori dello zero, $\nabla_{O \sqcup O}(x) = 0$. □

Proposizione 3. Per il link di Hopf destro e per il trifoglio destro valgono

$$\nabla_H(x) = x, \quad \nabla_{3_1}(x) = 1 + x^2.$$

Dimostrazione. Per il link di Hopf, la relazione skein produce da un lato il link banale a due componenti e dall'altro il nodo banale:

$$\nabla_H - 0 = x \cdot 1.$$

Applicandola poi a un incrocio opportuno del trifoglio si ottengono il nodo banale e il link di Hopf:

$$\nabla_{3_1} - 1 = x \nabla_H = x^2.$$

□

Questi valori provano che il link di Hopf non può essere separato e che il trifoglio non è il nodo banale. Il nodo a otto ha invece

$$\nabla_{4_1}(x) = 1 - x^2,$$

perciò non è equivalente né al nodo banale né al trifoglio.

Nota

Il polinomio di Conway non è un invariante completo. Il trifoglio destro e quello sinistro hanno entrambi polinomio $1 + x^2$, pur non essendo equivalenti. Uguaglianza dei polinomi non significa quindi uguaglianza dei nodi.

5.3 Cambiare incroci per semplificare

Lemma 1. *Ogni diagramma di link può essere trasformato in un diagramma di link banale mediante una successione finita di cambi di incrocio.*

Dimostrazione. Cominciamo dal caso di un nodo. Scegliamo un punto di partenza e percorriamo il diagramma secondo la sua orientazione. Ogni volta che incontriamo per la prima volta un incrocio, cambiamolo se necessario in modo da passare sotto. Il diagramma ottenuto può essere sollevato nello spazio con altezza crescente lungo il percorso: visto lateralmente, non presenta auto-intersezioni e si deforma in una circonferenza.

Per un link, ordiniamo prima le componenti. Cambiamo gli incroci fra componenti diverse in modo che la prima passi sempre sopra la seconda, la seconda sopra la terza, e così via. Le componenti possono allora essere separate in regioni disgiunte dello spazio. Applichiamo infine a ciascuna di esse il procedimento precedente. Otteniamo così un'unione disgiunta di circonferenze, cioè un link banale. □

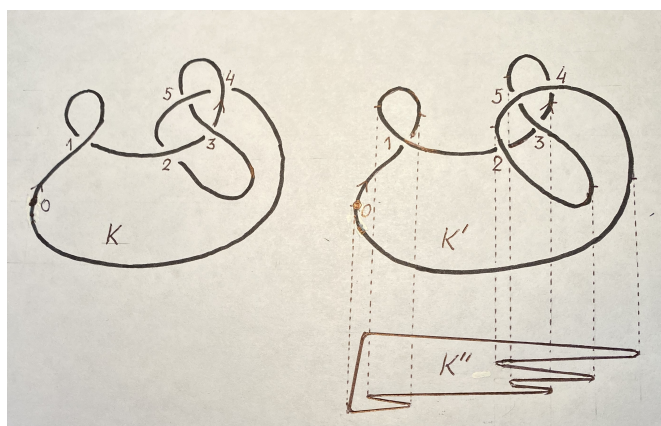


Figura 5: Un diagramma reso banale mediante cambi di incrocio.

Il minimo numero di cambi di incrocio necessari per rendere banale un diagramma è detto *unknotting number del diagramma*. Questa misura permette di organizzare un'induzione per il calcolo del polinomio.

5.4 Unicità: perché il calcolo non lascia scelte

Teorema 3 (Unicità). *Se esiste un'assegnazione $L \mapsto \nabla_L(x)$ che soddisfa invarianza, normalizzazione e relazione skein, allora essa è unica.*

Dimostrazione. Dimostriamo che, se un'assegnazione con le proprietà richieste esiste, il valore di $\nabla_L(x)$ è forzato dagli assiomi per ogni diagramma L .

Indichiamo con $c(L)$ il numero degli incroci del diagramma e con $u(L)$ il minimo numero di cambi di incrocio necessari per trasformarlo in un diagramma di link banale. Il lemma precedente garantisce che $u(L)$ è finito. Procediamo con una doppia induzione: prima su $c(L)$ e, fissato il numero degli incroci, su $u(L)$.

Caso iniziale per il numero degli incroci. Se $c(L) = 0$, il diagramma è un link banale. Se ha una sola componente, la normalizzazione impone

$$\nabla_L(x) = 1.$$

Se ha almeno due componenti, il suo polinomio è nullo. Infatti, aggiungiamo un ricciolo a una componente e applichiamo la relazione skein all'incrocio del ricciolo. I diagrammi L_+ e L_- sono entrambi equivalenti allo stesso link banale, mentre la risoluzione L_0 aggiunge una componente banale. Pertanto

$$0 = \nabla_{L_+}(x) - \nabla_{L_-}(x) = x \nabla_{L_0}(x),$$

e, poiché $\mathbb{Z}[x]$ non ha divisori dello zero, $\nabla_{L_0}(x) = 0$. Partendo dal nodo banale e ripetendo l'argomento si ottiene il risultato per ogni link banale con almeno due componenti. Dunque il valore è univocamente determinato quando non vi sono incroci.

Ipotesi induttiva esterna. Fissiamo $n > 0$ e supponiamo che il polinomio sia già univocamente determinato per tutti i diagrammi con meno di n incroci. Consideriamo un diagramma L con $c(L) = n$ e procediamo per induzione su $k = u(L)$.

Caso $k = 0$. In questo caso L rappresenta già un link banale. Per l'invarianza, il suo polinomio coincide con quello di un diagramma senza incroci dello stesso link: è quindi 1 se il link ha una componente e 0 se ne ha più di una. Anche questo valore è forzato dagli assiomi.

Passo induttivo su k . Supponiamo che il valore sia univocamente determinato per tutti i diagrammi con n incroci e numero di banalizzazione minore di k , e sia $u(L) = k > 0$. Scegliamo il primo incrocio di una successione minima di k cambi che rende banale L . Indichiamo con L' il diagramma ottenuto cambiando quell'incrocio e con L_0 la sua risoluzione orientata. Allora

$$c(L') = n, \quad u(L') = k - 1, \quad c(L_0) = n - 1.$$

Il polinomio di L' è già determinato dall'induzione interna su k ; quello di L_0 è già determinato dall'induzione esterna sul numero degli incroci.

Se l'incrocio scelto è positivo, la relazione skein dà

$$\nabla_L(x) = \nabla_{L'}(x) + x \nabla_{L_0}(x).$$

Se è negativo, la stessa relazione, risolta rispetto a ∇_L , dà

$$\nabla_L(x) = \nabla_{L'}(x) - x \nabla_{L_0}(x).$$

In entrambi i casi il membro di destra è già univocamente determinato; lo è quindi anche $\nabla_L(x)$. Questo conclude l'induzione su k , poi quella su n , e dimostra l'unicità dell'assegnazione. $\square$

Osservazione 4. La dimostrazione precedente fa due cose: stabilisce l'unicità e descrive un algoritmo ricorsivo per il calcolo. Non dimostra invece l'esistenza. Per quella occorre verificare che il risultato non dipenda dagli incroci scelti durante la ricorsione. Nelle pagine di riferimento l'esistenza viene ricondotta al polinomio di Alexander mediante un cambio di variabile; la costruzione richiede strumenti topologici che non fanno parte di questo laboratorio.

5.5 Somma connessa e moltiplicatività

La *somma connessa* $K_1 \# K_2$ si ottiene tagliando un piccolo arco in ciascuno dei due nodi e collegando a coppie le quattro estremità, senza introdurre nuovi incroci.

Teorema 4 (Moltiplicatività). Per due nodi orientati K_1, K_2 vale

$$\nabla_{K_1 \# K_2}(x) = \nabla_{K_1}(x) \nabla_{K_2}(x).$$

Dimostrazione. Fissiamo K_2 e consideriamo, come funzioni del primo nodo, le due assegnazioni

$$F(K) = \nabla_{K \# K_2}(x), \quad G(K) = \nabla_K(x) \nabla_{K_2}(x).$$

Se $K = O$ è il nodo banale, allora $O \# K_2$ è equivalente a K_2 e quindi

$$F(O) = \nabla_{K_2}(x) = G(O).$$

Più in generale, le due assegnazioni coincidono sui link banali: se vi sono almeno due componenti, entrambi i valori sono nulli, perché dopo la somma connessa rimane almeno una componente banale separata.

Applichiamo ora una relazione skein a un incrocio del diagramma di K , lasciando invariata la parte che contiene K_2 . Le tre somme connesse ottenute sono $K_+ \# K_2$, $K_- \# K_2$ e $K_0 \# K_2$; perciò F soddisfa la relazione skein. Anche G la soddisfa, perché

$$G(K_+) - G(K_-) = (\nabla_{K_+} - \nabla_{K_-}) \nabla_{K_2} = x \nabla_{K_0} \nabla_{K_2} = x G(K_0).$$

Le due assegnazioni coincidono dunque sui casi banali e soddisfano la stessa relazione skein. La doppia induzione usata nella dimostrazione dell'unicità mostra allora che coincidono su ogni diagramma K , e in particolare su K_1 . $\square$

Osservazione 5. La moltiplicatività spiega perché il polinomio interagisce bene con la decomposizione dei nodi in fattori primi. Tuttavia fattorizzare il polinomio non determina in modo univoco la decomposizione del nodo: ancora una volta, l'invariante perde informazione.

5.6 Esercizi

Gli esercizi ripercorrono il funzionamento della relazione skein: si sceglie un incrocio utile, si semplifica il diagramma e si controlla quali informazioni il polinomio riesce, o non riesce, a distinguere.

Esercizio 5.1. Calcolare il polinomio di Conway del link di Hopf sinistro.

Esercizio 5.2. Calcolare il polinomio del trifoglio sinistro. Il risultato permette di concludere che i due trifogli sono equivalenti?

Esercizio 5.3. Calcolare il polinomio del nodo a otto e usarlo per distinguerlo dal trifoglio e dal nodo banale.

Esercizio 5.4. Mostrare, mediante la relazione skein, che il polinomio di un link banale con almeno due componenti è zero. Estendere l'argomento a due link collocati in semispazi disgiunti.

Esercizio 5.5. Mostrare che il polinomio di Conway di un nodo non cambia invertendone l'orientazione e non cambia prendendone l'immagine speculare. Le due affermazioni rimangono vere per i link?

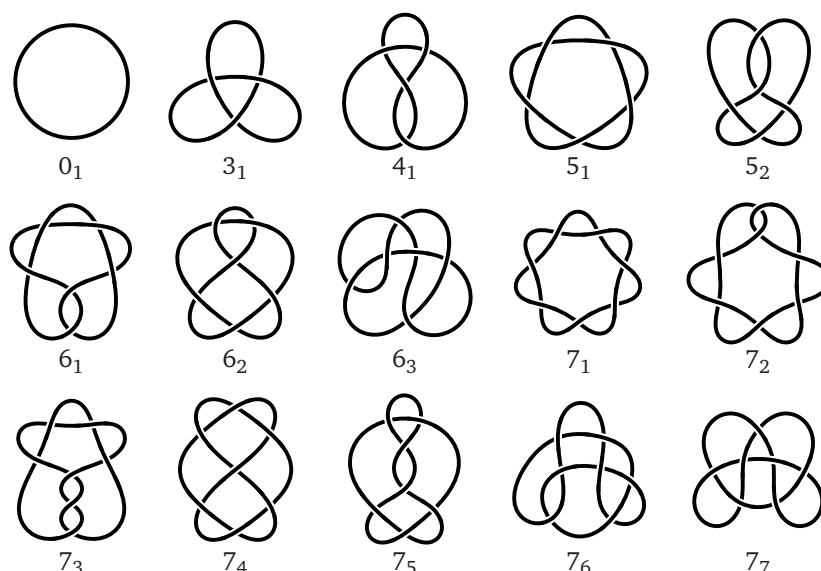


Figura 6: Una piccola tavola dei nodi fino a sette incroci, utile per gli esercizi di riconoscimento.

6 Chiusura

Il laboratorio è iniziato con un gesto concreto: prendere un filo e provare a scioglierlo. Si conclude con una catena di traduzioni matematiche:

filo $\longrightarrow$ nodo nello spazio $\longrightarrow$ diagramma $\longrightarrow$ invariante.

Ogni passaggio elimina dettagli, ma conserva ciò che serve per rispondere alla domanda successiva. La proiezione rende il nodo disegnabile; le mosse di Reidemeister rendono controllabile l'equivalenza; le colorazioni trasformano gli incroci in congruenze; il polinomio di Conway organizza i cambi di incrocio in un calcolo ricorsivo.

6.1 Mappa concettuale

Passaggio	Oggetto matematico	Domanda centrale
Deformare	isotopia ambiente	Quando due nodi sono lo stesso nodo?
Proiettare	diagrammi e mosse di Reidemeister	Quali modifiche del disegno non cambiano il nodo?
Colorare	congruenze modulo p	Una regola locale può distinguere due nodi?
Risolvere	polinomio e relazione skein	Come ridurre un diagramma complesso a casi noti?

6.2 Che cosa portare con sé

Il risultato più importante non è il valore di un singolo polinomio. È il metodo: scegliere con precisione le trasformazioni ammesse, cercare una quantità che non cambi e capire anche quali informazioni quell'invariante dimentica. Le 3-colorazioni distinguono il trifoglio dal nodo banale, ma non tutti i nodi; il polinomio di Conway è più ricco, ma non distingue un nodo dalla sua immagine speculare. Ogni nuovo strumento risolve alcuni problemi e ne lascia aperti altri.

Mini-progetto finale

Dividetevi in piccoli gruppi e scegliete due diagrammi dalla tavola dei nodi. Per ciascuna coppia:

1. cercate una semplificazione mediante mosse di Reidemeister;
2. confrontate il numero delle 3-colorazioni;
3. se le colorazioni non bastano, impostate un calcolo con la relazione skein;
4. preparate una breve conclusione distinguendo chiaramente ciò che avete dimostrato da ciò che avete soltanto osservato.

Lo scopo non è necessariamente classificare la coppia, ma costruire un argomento matematico controllabile e riconoscerne i limiti.

Domande guida

1. Quale informazione perdiamo passando dal nodo al numero delle sue colorazioni?
2. Che cosa conserva un polinomio che un singolo numero non potrebbe conservare?
3. Come potremmo progettare un nuovo invariante a partire da una regola locale agli incroci?
4. Perché è utile conoscere non soltanto la forza, ma anche i limiti di un invariante?

Fonti di lavoro

La dispensa è stata ricostruita dagli appunti manoscritti del laboratorio 2025, dagli appunti presi da uno studente durante gli incontri e dalle pagine in inglese utilizzate come riferimento per figure, esercizi e dimostrazioni. I ritagli presenti nelle figure provengono dal PDF di lavoro *2025 - Teoria Dei Nodi.pdf*; potranno essere sostituiti in seguito da disegni TikZ senza modificare la struttura del testo.