

# L'INFINITÀ DEI NUMERI PRIMI DA UN PUNTO DI VISTA TOPOLOGICO

LUCA BRUNI

**Origin.** Dispensa prodotta in prima istanza per la Settimana Matematica, febbraio 2023.

**Overview.** Un percorso storico e topologico sull'infinità dei numeri primi, dalle dimostrazioni classiche alla dimostrazione mediante la topologia di Furstenberg.

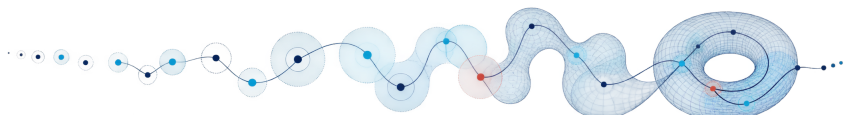
**Abstract.** La topologia è un'evoluzione moderna della geometria antica: banalizzando un po', possiamo dire che studia le proprietà delle "figure" quando queste vengono deformate "senza strappi". Come si può collegare la topologia all'infinità dei numeri primi? In questo laboratorio ripercorreremo la storia delle dimostrazioni dell'infinità dei numeri primi a partire dalla prima prova attribuita ad Euclide intorno al 300 a.C. fino ad arrivare a dimostrare questo (apparentemente) semplice enunciato mediante tecniche topologiche.

*Last update: August 22, 2026.*

*Menezio (Luca Bruni) · menezio96@gmail.com · sgpg.it*

## CONTENTS

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 1. Introduzione              | 2  |
| 2. Aritmetica e Numeri Primi | 2  |
| 3. Topologia e Numeri Primi  | 7  |
| 4. Giochi topologici         | 16 |
| References                   | 17 |



## 1. INTRODUZIONE

Queste note sono state redatte per la settimana matematica 2023 organizzata presso il dipartimento di matematica di Pisa. L'idea è far divertire gli studenti e dare un'idea su come si ragiona matematicamente.

## 2. ARITMETICA E NUMERI PRIMI

In questa prima giornata vedremo dei lemmi di aritmetica e teoria dei numeri che saranno cruciali per le dimostrazioni successive. Le dimostrazioni che verranno presentate oggi non sono di natura topologica ma aritmetica. Alcuni risultati saranno importanti anche per la dimostrazione di domani, ma l'idea è dare comunque una panoramica di insieme di più tecniche dimostrative di uno stesso teorema.

Chiameremo  $\mathbb{Z}$  l'insieme dei numeri interi e utilizzeremo il principio di induzione nelle sue varie forme, che ricordiamo:

**Teorema 2.1.** *Principio di induzione* Sia  $\mathcal{P}(n)$  un enunciato che dipende dal numero naturale  $n \in \mathbb{N}$ . I seguenti enunciati sono equivalenti (e veri):

**Induzione debole:** : Sia  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\mathcal{P}(n_0)$  è vero e vale la proprietà ( $\mathcal{P}(n)$  vero implica  $\mathcal{P}(n+1)$  vero per ogni  $n \geq n_0$ ), allora  $\mathcal{P}(n)$  è vero per ogni  $n \geq n_0$ .

**Induzione forte:** : Sia  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\mathcal{P}(n_0)$  è vero e vale la proprietà ( $\mathcal{P}(k)$  vero per ogni  $n_0 \leq k < n$  implica  $\mathcal{P}(n)$  vero), allora  $\mathcal{P}(n)$  è vero per ogni  $n \geq n_0$ .

**Principio del minimo:** : Ogni sottoinsieme non vuoto dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  ammette minimo.

Ricordiamo che, dati due numeri  $c, d \in \mathbb{Z}$  diremo che  $c$  divide  $d$  se esiste un numero intero  $k$  tale che  $d = ck$ . In quel caso scriveremo  $c|d$ .

**Definizione 2.2.** Siano  $a, b \in \mathbb{Z}$  con almeno uno dei due diverso da 0. Allora il Massimo Comune Divisore tra  $a$  e  $b$ ,  $\text{MCD}(a, b)$  è l'unico intero positivo  $d$  tale che:

- $d|a$  e  $d|b$ ;
- $d$  è più grande di ogni altro divisore comune di  $a$  e  $b$ , cioè se  $c|a$  e  $c|b$ , allora  $c \leq d$ .

**Teorema 2.3.** *Teorema della divisione euclidea* Siano  $a, b$  interi,  $b > 0$ . Allora esistono e sono unici due interi  $q$  (quoziente) e  $r$  (resto) con

$$\begin{aligned} a &= bq + r \\ 0 &\leq r < b \end{aligned}$$

*Proof.* Per semplicità, svolgiamo solo il caso  $a > 0$ , il caso  $a < 0$  è del tutto analogo. Sia  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid bn - a > 0\}$ . Questo insieme è non vuoto (basta scegliere un qualsiasi  $n > a$ ) ed è un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$ . Per il principio del minimo esiste  $\tilde{q}$  minimo di  $A$ . Chiamiamo  $q = \tilde{q} - 1$ : allora  $a = bq + r$  per un certo  $r$ . Dobbiamo solo verificare che  $0 \leq r < b$ .

Vale che  $a + b = b\tilde{q} + r > a + r$  dove l'ultima uguaglianza viene dal fatto che  $\tilde{q} \in A$ . Di conseguenza  $b > r$ .

Inoltre  $q \notin A$ , pertanto  $a = bq + r \leq a + r$ , da cui  $r \geq 0$ .

Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che  $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ . Ma allora  $b|(r_1 - r_2)$ ; ma  $|r_1 - r_2| < b$  e dunque deve valere  $r_1 = r_2$ . Segue che  $q_1 = q_2$ .  $\square$

**Teorema 2.4.** *Lemma di Bezout* Siano  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ ; allora esistono  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $am + bn = \text{MCD}(a, b)$ .

*Proof.* Definiamo l'insieme  $\text{CL}^+(a, b) = \{ar + bs \mid r, s \in \mathbb{Z}, ar + bs > 0\}$ . Tale insieme è non vuoto: senza perdita di generalità possiamo supporre  $a \neq 0$  e a quel punto basta scegliere  $s = 0$  e  $r$  dello stesso segno di  $a$ .

L'insieme  $CL^+(a, b)$  è contenuto in  $\mathbb{N}$  e dunque ammette minimo  $d$ . In particolare esistono  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $am + bn = d$ . Vogliamo dimostrare che  $d = \text{MCD}(a, b)$ . Mostriamo che  $d$  verifica le due proprietà che definiscono il massimo comun divisore:

- $d|a$  e  $d|b$ : svolgiamo la dimostrazione per  $a$ ; il caso  $b$  è analogo. Per la divisione euclidea possiamo scrivere  $a = qd + r$  con  $0 \leq r < d$ . Allora:

$$a = q(am + bn) + r$$

$$r = (-qm + 1)a + (-qn)b$$

Se adesso  $r > 0$  allora  $r \in CL^+(a, b)$ : questo però contraddice la minimalità di  $d$  in quanto  $r < d$ . Dunque  $r = 0$  e  $d|a$ .

- Se  $c|a$  e  $c|b$  allora  $c|d$ : segue immediatamente dalle ipotesi che  $c|am$ ,  $c|bn$  e dunque  $c|am + bn = d$ .

□

**Definizione 2.5.** Un numero intero positivo  $p$  è detto *numero primo* se  $p$  ha esattamente due divisori positivi distinti.

*Osservazione 2.6.* Il numero 1 NON è primo perché ha solamente un divisore positivo, sé stesso.

**Definizione 2.7.** Un numero intero positivo  $p$  è detto *elemento primo* se  $p \neq 1$  e soddisfa la seguente proprietà: se  $p|ab$  allora  $p|a$  o  $p|b$ .

**Lemma 2.8.** Sia  $p$  un numero intero positivo.  $p$  è un numero primo se e solo se  $p$  è un elemento primo.

*Proof.* Supponiamo che  $p|ab$  e che  $p$  non divida  $a$ . Poiché  $p$  è un numero primo  $\text{MCD}(p, a) = 1$ . Dunque per il Lemma di Bezout 2.4 esistono  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $am + pn = 1$ . Moltiplicando per  $b$  l'uguaglianza si ottiene  $abm + pnb = b$ ; ma allora  $p$  divide il membro di sinistra, dunque divide il membro di destra, cioè  $p|b$ .

Viceversa supponiamo che  $p$  abbia un divisore  $a$  con  $a \neq 1$  e  $a \neq p$ . Allora  $p = ab$  con  $b \neq 1$  e  $p \neq b$ . Poiché  $p$  è un elemento primo possono accadere due cose dato che  $p|ab$ :

- (1)  $p|a$ : dunque  $a|p$  e  $p|a$ ; questo implica che  $a = p$  assurdo;
- (2)  $p|b$ : dunque  $b|p$  e  $p|b$ : questo implica che  $a = 1$  assurdo;

□

Vista la corrispondenza tra numeri ed elementi primi, li chiameremo semplicemente primi.

**Teorema 2.9.** *Teorema fondamentale dell'aritmetica*

- Ogni numero intero maggiore o uguale a 2 o è primo, o si può scrivere come prodotto di numeri primi;
- Siano  $p_1 p_2 \cdots p_r = n = q_1 q_2 \cdots q_s$  due fattorizzazioni del numero  $n \geq 2$ , dove i  $p_i$  e i  $q_j$  sono primi. Supponiamo di avere scritto le fattorizzazioni in modo che  $p_1 \leq p_2 \leq \cdots p_r$  e  $q_1 \leq q_2 \leq \cdots q_s$ . Allora vale che  $r = s$  e, per ogni  $i = 1, \dots, s$ , vale che  $p_i = q_i$ .

*Proof.* • Per induzione forte.  $n = 2$  è un numero primo. Sia ora  $n$  generico. Se  $n$  è primo ho finito, altrimenti  $n$  non è primo e dunque esiste  $a \neq 1, p$  divisore di  $n$ . Ma allora  $n = ab$  con  $a, b < p$ . Per ipotesi induttiva  $a$  e  $b$  verificano la proprietà, e quindi la verifica  $n$ .

• Sia  $r \leq s$  e dimostriamo il teorema per induzione su  $r$ . Il passo base  $r = 1$  è immediato:  $s$  deve essere uguale a 1 altrimenti il numero  $a$  sarebbe contemporaneamente primo ( $a = p_1$ ) e non primo ( $a = q_1 \cdots q_s$ ). A quel punto è ovvio che  $a = p_1 = q_1$ .

Per il passo induttivo supponiamo che l'enunciato del teorema sia vero quando la fattorizzazione ha  $r - 1$  fattori primi. Cominciamo considerando il primo  $p_1$ . Visto che  $p_1$  divide  $q_1 q_2 \cdots q_s = q_1 (q_2 \cdots q_s)$ , allora  $p_1|q_1$  oppure  $p_1|(q_2 \cdots q_s)$ . Se  $p_1|q_1$  allora, visto che  $p_1$  e  $q_1$  sono primi, deve valere  $p_1 = q_1$ . Dimostriamo per assurdo che deve essere così. Se infatti  $p_1|(q_2 \cdots q_s)$ , iterando il ragionamento, troveremo dopo un numero finito di

passi un  $i$  tale che  $p_1 | q_i$  da qui  $p_1 = q_i > q_1$  (se fosse  $q_i = q_1$  allora fin dall'inizio avremmo avuto  $p_1 | q_1$ ). Dunque  $q_1$ , essendo strettamente minore di  $p_1$  è strettamente minore di ogni  $p_i$ . Ma noi sappiamo che  $q_1 | p_1 p_2 \cdots p_r$  e dunque con ragionamento simmetrico troviamo che  $q_1 = p_j$  in contraddizione col fatto che  $q_1 < p_j$  per ogni  $j$ . Deve dunque valere che  $p_1 = q_1$  e a questo punto è possibile semplificare l'uguaglianza  $p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$  per  $p_1$  ottenendo  $p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$ . A questo punto si conclude grazie all'ipotesi induttiva.  $\square$

Nel seguito, dimostriamo un po' di lemmi tecnici che ci permetteranno di dimostrare in più modi l'infinità dei numeri primi.

**Lemma 2.10.** *Sia  $n \geq 1$ , allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^n + 2^n} \geq \frac{1}{2}.$$

*Proof.* La sommatoria conta esattamente  $2^n$  termini e per ognuno dei termini vale che

$$\frac{1}{2^n + k} \geq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pertanto maggiorando termine a termine si ha

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^n + 2^n} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

**Corollario 2.11.** *La serie armonica diverge:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty,$$

ovvero per ogni  $M > 0$  esiste  $N$  tale che

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > M.$$

*Proof.* Suddividiamo la serie armonica in pezzi di lunghezza  $2^n$ :

$$1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^n + 2^n} \right) + \cdots$$

Per il Lemma 2.10 ogni blocco è maggiore o uguale a  $\frac{1}{2}$ . Questo implica che la serie diventa arbitrariamente grande e la sua divergenza (**esercizio:** provare a dimostrare esplicitamente la precedente affermazione).  $\square$

**Lemma 2.12.** *Sia  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Allora*

$$\sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

*Proof.* Chiamiamo  $S_n$  la somma e moltiplichiamola per  $q$ :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ qS_n &= q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} \end{aligned}$$

Sottraendo le somme membro a membro e ricavando  $S_n$  si ottiene

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$\square$

**Corollario 2.13.** Sia  $q \in (0, 1)$ , allora

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

*Proof.*  $S_n$  è una successione monotona crescente che tende ad  $S$ . Pretanto:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

□

**Lemma 2.14.** Definiamo per ogni  $n \geq 0$  l' $n$ -esimo Numero di Fermat come  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Le seguenti proprietà sono vere per  $n, m \geq 1$ :

- (1)  $F_n - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$ ;
- (2)  $F_n$  e  $F_m$  sono coprimi se  $n \neq m$ .

*Proof.* (1) Per induzione su  $n$ . Per  $n = 1$  si ha  $F_1 - 2 = 5 - 2 = 3 = F_0$ .  
Passo induttivo:  $n - 1 \Rightarrow n$ :

$$\begin{aligned} F_n - 2 &= 2^{2^n} + 1 - 2 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 - 1 = \left(2^{2^{n-1}} - 1\right) \left(2^{2^{n-1}} + 1\right) = \\ &= \left(2^{2^{n-1}} - 1\right) F_{n-1} = (F_{n-1} - 2) F_{n-1} = F_0 F_1 \cdots F_{n-1} \end{aligned}$$

- (2) Sia  $q$  un numero tale che  $q|F_n$  e  $q|F_m$  con  $m < n$ . Allora  $q|F_n - F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$ . Dunque  $q|2$ .  
D'altro canto  $F_n$  è dispari, dunque  $q$  deve essere dispari. Pertanto  $q = 1$  e  $\text{MCD}(F_n, F_m) = 1$ .

□

Analizziamo adesso alcune dimostrazioni sull'infinità dei numeri primi.

**Teorema 2.15** (Infinità dei numeri primi). *I numeri primi sono infiniti*

*Dimostrazione di Euclide - 300 a.C..* Supponiamo per assurdo che l'insieme dei numeri primi  $\mathcal{P}$  sia finito:  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Consideriamo il numero  $N = p_1 \cdots p_n + 1$ . Osserviamo subito che  $N$  non è divisibile per nessuno dei primi  $p_i$ , altrimenti  $p_i$  dividerebbe 1. Adesso il numero  $N$  o è primo o è prodotto di numeri primi per il Teorema fondamentale dell'aritmetica 2.9. Nel primo caso ho trovato un primo diverso da quelli elencati, nel secondo deve essere diviso da un primo  $q$  diverso dai  $p_i$  per quanto osservato. In entrambi i casi otteniamo una contraddizione e questo conclude la dimostrazione. □

*Dimostrazione di Eulero - 1737.* Supponiamo per assurdo che i numeri primi siano finiti:  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ .

Consideriamo il seguente prodotto (il cui risultato è un numero finito):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right) \left(\frac{p_2}{p_2 - 1}\right) \cdots \left(\frac{p_n}{p_n - 1}\right) = \\ &\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}}\right) \cdots \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}\right) = \\ &\left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \dots\right). \end{aligned}$$

Osserviamo che la proprietà distributiva si comporta bene anche quando si ha la moltiplicazione per somme infinite. Per il Teorema fondamentale dell'aritmetica 2.9 ogni numero  $n$  si scrive in modo *unico* come  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$  con  $p_i \in \mathcal{P}$ . Pertanto, sciogliendo il prodotto, si ottiene la somma di tutti i numeri della forma  $\frac{1}{n}$ , ovvero:

$$\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)\cdots\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

La quantità a sinistra è finita, mentre la quantità a destra è infinita per il Corollario 2.11; Questo ci dà una contraddizione. Ne deduciamo che i numeri primi sono infiniti.  $\square$

*Dimostrazione di Goldbach - 1742.* Consideriamo la successione dei numeri di Fermat; per il teorema fondamentale dell'aritmetica, o  $F_i$  è primo o è diviso da un primo  $p_i$ . Dato che  $\text{MCD}(F_i, F_j) = 1$  allora, in virtù del Lemma 2.14, esiste un numero primo distinto associato ad ogni  $F_i$ . Dato che gli  $F_i$  sono infiniti, si ha la tesi.  $\square$

*Dimostrazione di Erdos - 1938.* Creiamo un'altra successione di numeri con proprietà di coprimialità fra i suoi elementi e deduciamone l'infinità dei numeri primi. Consideriamo la seguente successione:

$$\begin{aligned} a_1 &= n \\ a_{k+1} &= a_k(a_k + 1). \end{aligned}$$

Dimostriamo adesso il seguente enunciato:

*il numero  $a_k$  ha almeno  $k$  divisori primi distinti.*

Il passo base è immediato (supponendo  $n \neq 1$ ).

Consideriamo adesso  $a_{k+1} = a_k(a_k + 1)$ : per ipotesi induttiva  $a_k$  ha almeno  $k$  divisori primi distinti; questi però non possono dividere anche  $a_k + 1$ , altrimenti dividerebbero 1. Per il teorema fondamentale dell'aritmetica 2.9 si ha che  $a_k + 1$  o è primo, o è prodotto di primi. L'enunciato è dunque dimostrato e dato che la successione ha infiniti termini distinti, i numeri primi sono infiniti.  $\square$

## 3. TOPOLOGIA E NUMERI PRIMI

In questa giornata daremo le definizioni di base e l'idea *intuitiva* di spazio topologico. Faremo alcuni esempi di spazi topologici e, dopo aver introdotto delle proprietà importanti e in un certo senso intrinseche della topologia, cercheremo di analizzarle negli esempi visti. A quel punto ci dedicheremo alla dimostrazione della infinità dei numeri primi definendo uno spazio topologico ad hoc per i nostri scopi

## 3.1. Preliminari e definizioni sugli spazi topologici.

**Definizione 3.1.** Sia  $X$  un insieme; una *topologia* su  $X$  è una famiglia  $\tau$  di sottoinsiemi di  $X$ , detti *aperti*, tale che:

- $\emptyset$  e  $X$  sono aperti;
- unione arbitraria di aperti è aperta;
- intersezione di due aperti è aperta.

La coppia  $(X, \tau)$  è detta *spazio topologico* e i suoi elementi sono detti *punti*. Chiameremo *chiuso* il complementare di un aperto.

**Esercizio 3.2.** Sia  $X$  un insieme con  $n$  elementi ( $X$  ha *cardinalità*  $n$  e si scrive  $|X| = n$ ). Dimostrare che le *parti* di  $X$ ,  $\mathcal{P}(X)$ , ovvero l'insieme dei sottoinsiemi di  $X$  ha cardinalità  $2^n$ .

**Esercizio 3.3.** Mostrare che la terza condizione implica che l'intersezione di un qualsiasi numero finito di aperti è aperto.

**Esercizio 3.4.** Dare la definizione di topologia utilizzando i chiusi e non gli aperti.

**Esempio 3.5.** Sia  $X = \{a, b\}$  un insieme con due elementi. Sia  $\tau_1 := \{\emptyset, \{a\}\}$ :  $\tau_1$  non è una topologia, infatti  $X$  non appartiene a  $\tau_1$ .

Sia  $\tau_2 := \{\emptyset, X, \{a\}\}$ . Le tre richieste sono facilmente verificabili e dunque  $(X, \tau_2)$  è uno spazio topologico.

**Definizione 3.6.** Sia  $\tau$  una topologia su  $X$ . Un sottoinsieme  $\mathcal{B} \subset \tau$  è una *base* di  $\tau$  se per ogni aperto  $A$  in  $\tau$ ,  $A$  si scrive come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

L'idea di base è quella di avere una famiglia con cui si riescono a generare tramite unione tutti gli aperti della topologia. L'utilità di averne una sta nel fatto che ci possiamo ricondurre a studiare alcune proprietà solo sugli aperti di una base per poi trasportarle ad ogni aperto.

**Teorema 3.7.** Sia  $X$  un insieme e sia  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ . Allora  $\mathcal{B}$  è base di una topologia su  $X$  se e solo se valgono le seguenti due proprietà:

- (1)  $X = \bigcup \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ ;
- (2) Per ogni  $A, B$  in  $\mathcal{B}$  e per ogni  $x \in A \cap B$  esiste un  $C \in \mathcal{B}$  tale che  $x$  sta in  $C$  e  $C$  è contenuto in  $A \cap B$ .

*Proof.* Ovviamente, se  $\mathcal{B}$  è base sono verificate le due condizioni: la prima è vera poiché  $X$  è aperto, la seconda poiché è sufficiente prendere come  $C$  l'intersezione  $A \cap B$ .

Viceversa definiamo gli aperti come unioni qualsiasi di elementi di  $\mathcal{B}$ . Per la prima condizione  $X$  è aperto. Inoltre l'insieme vuoto è aperto poiché è unione vuota e infine per costruzione unione di aperti è aperta. Verifichiamo che l'intersezione di due aperti è aperta: la seconda condizione implica che per ogni  $A, B \in \mathcal{B}$  vale che

$$A \cap B = \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{B}, C \subset A \cap B\}.$$

Se adesso  $U = \bigcup_i A_i$  e  $V = \bigcup_j B_j$  sono aperti, ovvero unioni arbitrarie di elementi  $A_i$  e  $B_j$  in  $\mathcal{B}$ , allora

$$U \cap V = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) = \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{B} \text{ ed esistono } i, j \text{ tali che } C \subset A_i \cap B_j\}$$

cioè l'intersezione è aperta poiché è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ . □

**Osservazione 3.8.** Un insieme  $A$  è aperto se e solo se per ogni suo punto  $x$  esiste un aperto  $U_x$  che contiene  $x$  e che è interamente contenuto in  $A$ . Una implicazione è ovvia, basta prendere per il punto  $x$  l'aperto  $A$  in cui è contenuto; viceversa scriviamo  $A$  come

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$

che è aperto in quanto ogni  $U_x$  è aperto.

A volte, per dimostrare che un insieme  $A$  è aperto, mostreremo che ogni punto di  $A$  ha un *intorno aperto* che lo contiene e che è interamente contenuto in  $A$ .

**Definizione 3.9.** Sia  $Y \subset X$  un sottoinsieme di  $X$ .  $Y$  ha la *topologia di sottospazio indotta da  $X$*  nel seguente modo:  $B \subset Y$  è aperto in  $Y$  se esiste  $A \subset X$  aperto tale che  $A \cap Y = B$ .

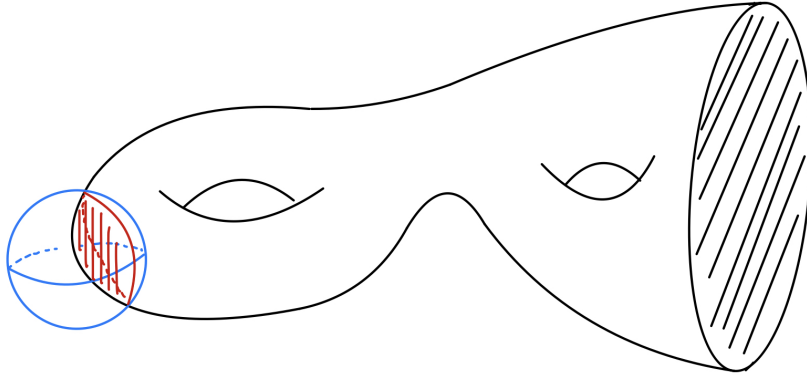


FIGURE 1. La superficie in figura è immersa nello spazio  $\mathbb{R}^3$ . Un suo aperto è dato dall'intersezione di una palla aperta di  $\mathbb{R}^3$  con la superficie.

Vediamo adesso alcuni esempi di spazi topologici:

**Esempio 3.10. Topologia discreta:** Sia  $X$  un insieme. Mettiamo su  $X$  la topologia in cui ogni punto è aperto. Le richieste per essere una topologia sono banalmente soddisfatte.

**Esempio 3.11. Topologia indiscreta:** Sia  $X$  un insieme. Mettiamo su  $X$  la topologia in cui gli unici aperti sono l'insieme vuoto  $\emptyset$  e il tutto  $X$ . Le richieste per essere una topologia sono banalmente soddisfatte.

**Esempio 3.12. Topologia cofinita:** Sia  $X$  un insieme infinito. Definiamo la seguente topologia:

$C$  sottoinsieme di  $X$  diverso dal vuoto e da tutto  $X$  è chiuso se e solo se è finito.

**Esercizio 3.13.** Verificare che tale scelta dei chiusi definisce una topologia su  $X$ .

Nel caso in cui  $X$  sia un insieme finito, la topologia cofinita coincide con la topologia discreta (ogni punto  $x$  è aperto in quanto è complementare del chiuso  $X \setminus \{x\}$ ).

**Esempio 3.14. Topologia del limite inferiore:** Sia  $\mathbb{R}$  l'insieme dei numeri reali. Definiamo gli intervalli semi-aperti  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  e chiamiamo *Retta di Sorgenfrey* la retta reale con la topologia generata dagli intervalli semi-aperti.

**Esempio 3.15. Topologia dei 4 punti:** Sia  $X = \{a, b, c, d\}$ . Diciamo che  $\{a\}, \{b\}$  sono punti aperti e che  $\{c\}, \{d\}$  sono punti chiusi. A partire da questi dati esiste un'unica topologia sull'insieme  $X$ .

**3.2. Topologia Euclidea.** Consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^n$  e definiamo le *palle aperte di centro*  $x \in \mathbb{R}^n$  e *raggio*  $r > 0$  come  $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, y) < r\}$ . Le palle aperte di centro  $x$  e raggio  $r$  sono una base di una topologia su  $\mathbb{R}^n$  detta *Topologia euclidea*.

Verifichiamo l'affermazione utilizzando il Teorema 3.7: la prima condizione è banalmente soddisfatta; per quanto riguarda la seconda, è sufficiente osservare che preso un punto nell'intersezione, a meno di restringere opportunamente il raggio di una palla centrata in quel punto, tale palla continuerà a rimanere tutta contenuta nell'intersezione. Formalmente, siano  $B(x_1, r_1)$  e  $B(x_2, r_2)$  le due palle e sia  $x$  un punto dell'intersezione. Per entrambe le palle tracciamo la retta  $s_i$  che congiunge il centro  $x_i$  con il punto  $x$  e chiamiamo  $d_i$  la lunghezza del segmento che congiunge  $x$  con il bordo della palla. E' facile mostrare che la palla  $B(x, \frac{d_i}{2})$  è interamente contenuta in  $B(x_i, r_i)$  utilizzando la disuguaglianza triangolare. Chiamando  $d$  il minimo tra  $\frac{d_1}{2}$  e  $\frac{d_2}{2}$ , vale allora che  $B(x, d)$  contiene  $x$  ed è interamente contenuta nell'intersezione delle due palle, si veda Figura 3.2.

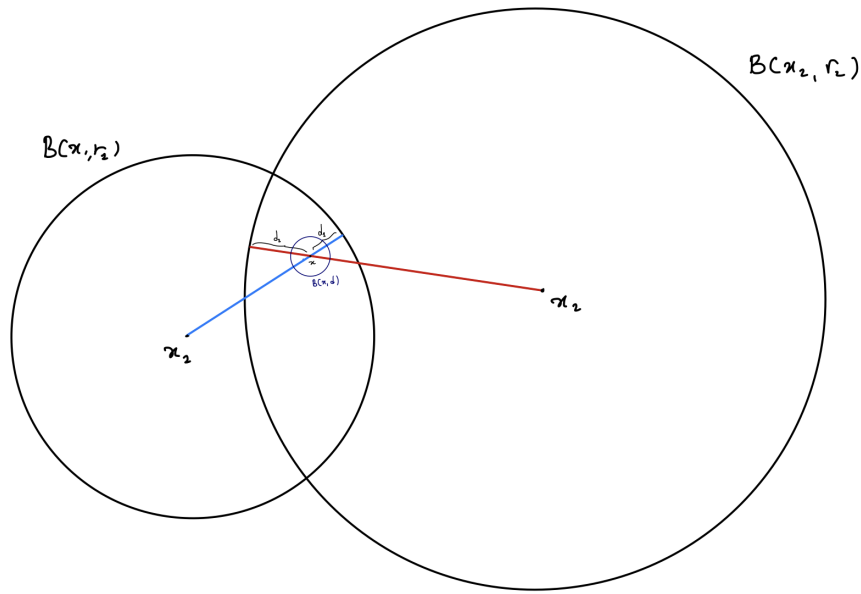


FIGURE 2. Le palle di centro e raggi variabili formano una topologia per lo spazio  $n$ -dimensionale.

La topologia Euclidea coincide con il nostro classico concetto di vicinanza e distanza nello spazio  $n$  dimensionale.

La topologia Euclidea è anche quella che mettiamo negli oggetti geometrici che sono *localmente* lo spazio  $n$ -dimensionale. Se prendiamo ad esempio una circonferenza, diremo che un aperto è un arco di circonferenza aperto: pensando la circonferenza come oggetto che localmente assomiglia a una retta (ignorando cioè la curvatura), l'arco si trasforma in un segmento aperto che coincide con una palla aperta in  $\mathbb{R}$ .

**3.3. Topologia di Zariski.** Sia  $\mathbb{C}^n$  il piano complesso e sia dato l'anello di polinomi  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Definiamo i chiusi in  $\mathbb{C}^n$  come gli zeri di una famiglia di polinomi in  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Più precisamente un chiuso di  $\mathbb{C}^n$  è un insieme della forma  $V((f_1, \dots, f_m)) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>In realtà tale famiglia di polinomi può essere infinita, ma per semplicità di notazione (e per il Teorema della base di Hilbert) scriveremo sempre famiglie finite. Nel caso in cui comunque compaiano famiglie infinite, non dobbiamo spaventarci, ma accoglierle nella definizione.

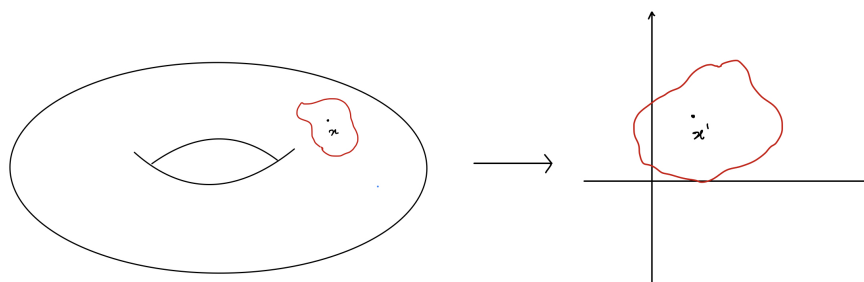


FIGURE 3. Un intorno del punto  $x$  del toro che appare localmente come un intorno del punto  $x'$  nel piano.

Verifichiamo che una tale scelta dei chiusi definisce una topologia seguendo la definizione che si può dare nell'Esercizio :  $\emptyset = V(1)$  e  $\mathbb{C}^n = V(0)$  e dunque i due insiemi sono aperti. Verifichiamo che unione di due chiusi è chiusa: vale che  $V((f_1, \dots, f_m)) \cup V((g_1, \dots, g_t)) = V((f_i g_j)_{i,j})$  che è chiuso. Manca da dimostrare che intersezione arbitraria di chiusi è chiusa: siano  $V_j = V((f_i^j)_{i=1, \dots, n_j})$  una famiglia di chiusi con  $j \in J$  insieme di indici qualsiasi. Allora

$$\bigcap_j V_j = V((f_i^j)_{j \in J, i \in \{1, \dots, n_j\}})$$

che è un chiuso anche se il numero di polinomi della famiglia è infinita.

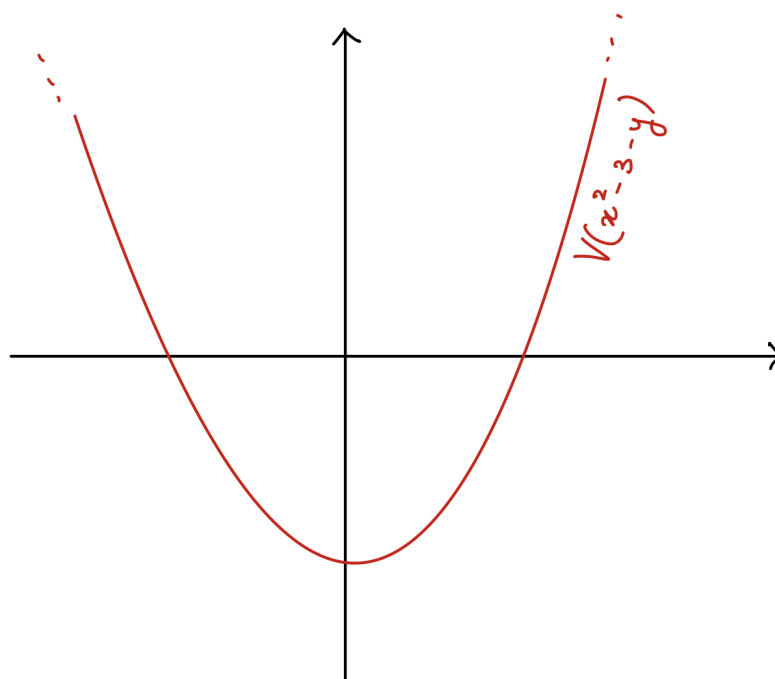


FIGURE 4. La parabola è un chiuso di Zariski e corrisponde al luogo di zeri di  $f = x^2 - 3 - y$ .

**3.4. Alcune proprietà topologiche.** Nel seguito vedremo alcune proprietà topologiche caratterizzanti e utili per poter distinguere spazi topologici diversi tra loro.

**Definizione 3.16.** Diremo che uno spazio topologico è  $T1$  se per ogni coppia di punti distinti  $x, y$  esistono due aperti  $U, V$  tali che  $U$  contiene  $x$  e non  $y$ , mentre  $V$  contiene  $y$  e non  $x$ . Equivalentemente uno spazio è  $T1$  se e solo se ogni suo punto è chiuso.

Diremo che uno spazio topologico è  $T2$  se per ogni coppia di punti  $x, y$  esistono due aperti  $U, V$  tali che  $x \in U, y \in V$  tali che  $U \cap V = \emptyset$ .



FIGURE 5. A sinistra, un'immagine indicativa su come possono stare due intorni in uno spazio  $T1$ . A destra su come devono stare in uno spazio  $T2$ .

**Osservazione 3.17.** Uno spazio  $T2$  è uno spazio  $T1$ : è sufficiente considerare i due aperti della definizione di spazio topologico  $T2$  per ottenere quelli necessari per essere  $T1$ .

**Definizione 3.18.** Uno spazio topologico  $X$  si dice *connesso* se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono  $\emptyset$  e  $X$ . Uno spazio topologico che non è connesso si dice *sconnesso*.

**Lemma 3.19.** Per uno spazio topologico  $X$  le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (1)  $X$  è sconnesso;
- (2)  $X$  è unione disgiunta di due aperti propri;
- (3)  $X$  è unione disgiunta di due chiusi propri.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2), (3): Sia  $A \subset X$  aperto, chiuso e non vuoto. Se  $A \neq X$ , allora il complementare  $B = X \setminus A$  è aperto, chiuso e non vuoto. Inoltre  $X$  è unione disgiunta di  $A$  e  $B$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Se  $A_1 \cup A_2 = X$  è una unione disgiunta di aperti non vuoti, allora  $A_1 = X \setminus A_2$  è anche chiuso.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Se  $C_1 \cup C_2 = X$  è una unione disgiunta di chiusi non vuoti, allora  $C_1 = X \setminus C_2$  è anche aperto.  $\square$

**Definizione 3.20.** Sia  $X$  un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}$ . Diremo che  $x \in \mathbb{R}$  è l'estremo superiore dell'insieme  $X$ ,  $\sup(X) = x$ , se

- (1)  $x \geq y$  per ogni  $y \in X$ ;
- (2) se  $z < x$ , allora esiste  $t \in X$  maggiore di  $z$ .

Diremo inoltre che  $x \in \mathbb{R}$  è l'estremo inferiore di  $X$ ,  $\inf(X) = x$ , se

- (1)  $x \leq y$  per ogni  $y \in X$ ;
- (2) se  $z > x$ , allora esiste  $t \in X$  minore di  $z$ .

**Osservazione 3.21.** L'estremo inferiore e l'estremo superiore esistono sempre e sono unici: l'esistenza è assicurata dall'assioma di Dedekind AGGIUNGI REFERENZA. Per quanto riguarda l'unicità,

supponiamo per assurdo che esistano due estremi superiori  $x_1 \neq x_2$ . Senza perdita di generalità possiamo assumere  $x_1 < x_2$ . Ma allora, per la proprietà (2) di  $x_2$  esiste un  $t \in X$  maggiore di  $x_1$ , contro la proprietà (1) di  $x_1$ .

*Osservazione 3.22.* Non sempre l'estremo superiore e inferiore di un insieme appartengono all'insieme stesso. Ad esempio l'intervallo  $I = (0, 1)$  ha  $\inf(I) = 0$  e  $\sup(I) = 1$ .

**Lemma 3.23.** *Sia  $C$  un chiuso di  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea, allora  $\inf(C)$  e  $\sup(C)$  appartengono a  $C$ .*

*Proof.* Chiamiamo  $\inf(C) = c$  e supponiamo per assurdo che  $c \notin C$ . Dato che  $c$  è chiuso, il suo complementare è aperto e dunque esiste una palla  $B(c, \varepsilon)$  contenuta propriamente nel complementare di  $C$  in quanto le palle sono una base. Consideriamo adesso l'elemento  $z = c + \frac{\varepsilon}{2}$ : tale elemento è maggiore di  $c$ , ma non esiste nessun  $t \in C$  che sia minore di  $z$ . Contraddizione e  $c \in C$ .  $\square$

*Osservazione 3.24.* Sia  $C$  un chiuso che contiene l'intervallo  $(a, b)$ . Allora contiene anche l'intervallo  $[a, b]$ . Infatti, se ad esempio  $b \notin C$ , allora esiste una palla  $B(b, \varepsilon)$  che non interseca  $(a, b)$  e questo è assurdo.

**Teorema 3.25.** *L'intervallo  $[0, 1]$  è connesso per la topologia euclidea.*

*Proof.* Siano  $C$  e  $D$  due sottospazi chiusi e non vuoti di  $[0, 1]$  tali che  $C \cup D = [0, 1]$ ; vogliamo dimostrare che  $C \cap D \neq \emptyset$ . Supponiamo per fissare le idee che  $0 \in C$  e indichiamo con  $d \in [0, 1]$  l'estremo inferiore di  $D$ : ci basterà dimostrare che  $d \in C \cap D$ . Dato che  $D$  è chiuso, si ha che  $d \in D$  per il Lemma 3.23. Se adesso  $d = 0$  abbiamo finito. Se invece  $d > 0$ , poniamo  $E = C \cap [0, d]$ : date che  $E$  è chiuso e contiene  $[0, d)$ , si ha che  $d \in E$  e quindi  $d \in C$ .  $\square$

**Proposizione 3.26.** *Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia arbitraria di connessi di uno spazio topologico  $Y$  (ciascuno con la topologia di sottospazio). Supponiamo tutti gli insiemi della famiglia si intersechino in un punto. Allora l'unione di tutti gli insiemi della famiglia è connessa.*

*Proof.* Chiamiamo  $\mathcal{F}$  la famiglia di connessi. Per ipotesi abbiamo che  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$  e vogliamo dimostrare che  $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$  è connesso. Supponiamo per assurdo che sia sconnesso e che esistano  $A, B$  aperti disgiunti non vuoti tali che  $A \cup B = X$ . Sia  $x$  nell'intersezione di tutti i connessi; senza perdita di generalità possiamo supporre  $x \in A$ . Sia adesso  $y$  un qualsiasi punto di  $B$  e sia  $E$  un connesso della famiglia tale che  $y \in E$ . Per quanto detto  $A \cap E$  è non vuoto (ci sta  $x$ ) e  $B \cap E$  è non vuoto (ci sta  $y$ ). Ma allora posso suddividere  $E$  nei due aperti non vuoti e disgiunti  $A \cap E$  e  $B \cap E$ , contro la connessione di  $E$ .  $\square$

**Definizione 3.27.** Un *ricoprimento* di un insieme  $X$  è una famiglia  $\mathcal{A}$  di sottoinsiemi di  $X$  tali che  $X = \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$ .

Diremo che  $\mathcal{A}$  è un *ricoprimento aperto* (rispettivamente *chiuso*) se tutti gli  $A \in \mathcal{A}$  sono aperti (rispettivamente chiusi).

**Definizione 3.28.** Uno spazio topologico  $X$  si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento finito, i.e. dato  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$  esistono  $i_1, \dots, i_s$  tali che  $X = \bigcup_{j=1}^s A_{i_j}$ .

Vediamo adesso le caratteristiche di T1, T2, connessione e compattezza per gli spazi topologici già descritti.

**Topologia discreta:** La topologia discreta è banalmente T2 e sconnessa: ogni punto è aperto e chiuso. Inoltre è compatta se e solo se  $X$  è un insieme finito: se infatti  $X$  è finito, allora ogni ricoprimento è finito; viceversa, posso prendere il ricoprimento di  $X$  fatto da tutti i suoi punti: per compattezza di  $X$  ne posso estrarre un sottoricoprimento finito che implica la finitezza dei punti.

**Topologia indiscreta:** Per la pochezza dei suoi aperti (e dei suoi chiusi), la topologia indiscreta non è T1 e di conseguenza non è T2. E' invece connessa, ha solo il tutto e il vuoto come aperti e come chiusi, e compatta: l'unico ricoprimento esistente è quello fatto con il solo insieme  $X$ .

**Topologia cofinita:** : Un insieme  $X$  con la topologia cofinita è banalmente T1, ma non è T2. Mostriamo infatti che ogni due aperti si intersecano. Supponiamo esistano  $A, B$  aperti tali che  $A \cap B = \emptyset$ . Allora, passando ai complementari si ha che l'unione di due chiusi è tutto l'insieme  $X$ . Ma i chiusi sono finiti per ipotesi, mentre  $X$  è infinito, assurdo. Questo prova che  $X$  con la topologia cofinita non è T2 e non è neanche connesso in virtù del Lemma 3.19 (come appena mostrato, ogni due aperti si intersecano).  $X$  con la topologia cofinita è invece compatto: preso un ricoprimento aperto, scegliamo uno degli aperti del ricoprimento e lo chiamiamo  $A$ . Questo avrà un complementare chiuso e dunque finito: per ciascun punto del complementare  $\{x_1, \dots, x_n\}$  scelgo un aperto del ricoprimento  $A_i$  che contiene  $x_i$ . Allora  $A \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$  è ricoprimento finito del ricoprimento iniziale.

**Topologia dei 4 punti:** : Per le topologie con un numero finito (e basso) è facile analizzare le proprietà esposte perché è possibile fare la verifica diretta.

**Esercizio 3.29.** Capire se lo spazio in considerazione è T1, T2, connesso e compatto.

**Topologia Euclidea:** : Nel caso unidimensionale è già stato mostrato che l'intervallo  $[0, 1]$  è connesso; con un ragionamento del tutto analogo è possibile dimostrare che ogni intervallo  $(a, b)$  (con estremi compresi e/o non compresi lo è).  $\mathbb{R}^n$  con la topologia euclidea è sicuramente T2: infatti siano  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e sia  $d = \text{dist}(x, y)$ . Due aperti disgiunti che contengono  $x$  e  $y$  sono ad esempio  $B(x, \frac{d}{4})$  e  $B(y, \frac{d}{4})$ . Si può dimostrare che le palle sono connesse e che  $\mathbb{R}^n$  con la topologia euclidea è connesso. Questo, ad esempio, è stato fatto nel caso unidimensionale quando è stato mostrato che l'intervallo  $[0, 1]$  è connesso. Grazie a questo e alla Proposizione 3.26 è facile mostrare che le palle sono connesse anche in dimensione più alta: è sufficiente scrivere una palla  $n$ -dimensionale come unione di tutti i ruotati di una palla  $n - 1$  dimensionale e concludere per induzione. Infine, per dimostrare che  $\mathbb{R}^n$  è connesso, basta scriverlo come unione delle palle  $B(0, n)$  con  $n \in \mathbb{N}$  che è una unione di connessi che si intersecano.

Infine  $\mathbb{R}^n$  non è compatto: consideriamo il ricoprimento fatto dalle palle aperte  $B(0, n)$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Questo ricoprimento non ammette un sottoricoprimento finito: se lo ammettesse,  $\mathbb{R}^n$  coinciderebbe con una palla  $B(0, N)$ , che è assurdo.

**Topologia di Zariski:** : La topologia di Zariski è sicuramente T1. Preso un punto di  $\mathbb{C}^n$ , ovvero una  $n$ -upla della forma  $(a_1, \dots, a_n)$ , questo punto è chiuso in quanto può essere espresso nella forma  $V((x_1 - a_1), \dots, (x_n - a_n))$ . Per quanto riguarda l'essere T2, connesso o compatto, le dimostrazioni sono più tecniche: vale che lo spazio non è T2, non è connesso, ma è compatto. Per maggiori dettagli si veda [Har77], algebraic geometry. Questa è una unione di una famiglia di connessi che si intersecano e, sempre per la Proposizione 3.26, tale unione è connessa.

### 3.5. Topologia degli interi equispaziati.

**Definizione 3.30.** Sia  $\mathbb{Z}$  l'insieme dei numeri interi. Siano  $a, b$  in  $\mathbb{Z}$  con  $b > 0$ . Definiamo gli insiemi

$$N_{a,b} = \{a + kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

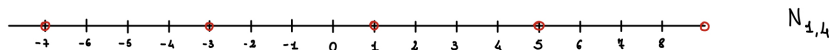


FIGURE 6. Esempio di un insieme  $N_{a,b}$  sulla retta dei numeri interi.

**Teorema 3.31.** La famiglia  $\mathcal{B} = \{N_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b > 0\}$  è una base di una topologia su  $\mathbb{Z}$  detta Topologia degli interi equispaziati.

*Proof.* Verifichiamo che  $\mathcal{B}$  soddisfa le ipotesi del Teorema 3.7:

- (1) Sia  $x \in \mathbb{Z}$ ; allora  $x \in N_{0,1}$ . Dunque  $\bigcup N_{a,b} = \mathbb{Z}$ ;  
 (2) Sia  $x \in N_{a_1,b_1} \cap N_{a_2,b_2}$ . Vale allora che  $x \in N_{x,\text{mcm}(b_1,b_2)}$  e  $N_{x,\text{mcm}(b_1,b_2)}$  è contenuto nell'intersezione. Infatti:

$$\alpha = x + k \text{mcm}(b_1, b_2) = a_1 + b_1 k_1 + \text{mcm}(b_1, b_2) k = a_1 + b_1 \left( k_1 + \frac{\text{mcm}(b_1, b_2)}{b_1} k \right) \in N_{a_1, b_1}.$$

In maniera analoga si mostra il contenimento nell'altro aperto.

□

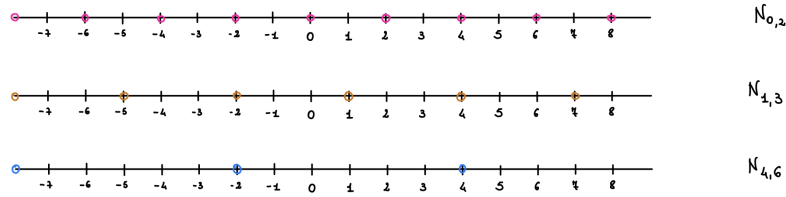


FIGURE 7. Due insiemi  $N_{a,b}$  e un terzo insieme contenuto nell'intersezione di essi e della stessa forma.

**Lemma 3.32.** *Valgono i seguenti fatti:*

- Gli aperti della topologia degli interi equispaziati hanno tutti cardinalità infinita;
- Gli aperti  $N_{a,b}$  sono chiusi.

*Proof.* • Dato che  $\mathbb{Z}$  ha cardinalità infinita e che gli insiemi  $N_{a,b}$  sono in biezione con  $\mathbb{Z}$  tramite la mappa  $\{a + kb\} \longleftrightarrow k$ , ogni aperto contiene al suo interno un insieme con lo stesso numero di elementi di  $\mathbb{Z}$  ed è pertanto infinito.  
 • Possiamo scrivere  $N_{a,b}$  come il complementare di  $\mathbb{Z}$  rispetto a tutte le altre classi di resto modulo  $b$ . In particolare vale che

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{a' \in \{0,1,\dots,b-1\}, a' - a \notin \mathbb{Z}b} N_{a',b}$$

e pertanto  $N_{a,b}$  è chiuso nella topologia degli interi equispaziati poiché è complementare di un aperto.

□

**Teorema 3.33** (Infinità dei numeri primi). *I numeri primi sono infiniti*

*Dimostrazione di Fürstenberg - 1955.* Supponiamo per assurdo che l'insieme dei numeri primi  $\mathcal{P}$  sia finito:  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Allora per il Teorema fondamentale dell'aritmetica 2.9 ogni numero diverso da  $-1$  o  $1$  appartiene a uno degli  $N_{0,p_i}$ . Ma allora vale la seguente uguaglianza:

$$\{-1, 1\} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^n N_{0,p_i}$$

Per il secondo punto del Lemma 3.32, gli  $N_{0,p_i}$  sono chiusi e nell'ipotesi di assurdo anche la loro unione è chiusa poiché è una unione finita. Questo implica che l'insieme  $\{-1, 1\}$  è un aperto; ma questa è una contraddizione con il primo punto del Lemma 3.32. Ciò dimostra l'infinità dei numeri primi.

□

**Proposizione 3.34.**  $\mathbb{Z}$  con la topologia degli interi equispaziati è  $T_2$ , sconnessa e non compatta.

*Proof.* Mostriamo prima che lo spazio è T2. Siano  $x, y \in \mathbb{Z}$  e supponiamo senza perdita di generalità che  $x < y$ . Chiamiamo  $d = y - x + 1$ . Allora i due aperti  $N_{x,d}$  e  $N_{y,d}$  contengono rispettivamente  $x$  e  $y$  e non si intersecano.

Lo spazio non è connesso in quanto gli  $N_{a,b}$  sono sia aperti che chiusi per il Lemma 3.32.

Lo spazio non è compatto: consideriamo il ricoprimento dato dagli aperti  $A_n = (N_{0,2^n})^c$  con  $n \geq 1$  (sono aperti in quanto gli  $N_{a,b}$  sono chiusi per il Lemma 3.32) e da un aperto  $A_0 = N_{0,3}$  che contiene lo zero<sup>2</sup>. Da tale ricoprimento è impossibile estrarre un sottoricoprimento finito. Se infatti fosse possibile tutto lo spazio coinciderebbe con un certo  $A_n \cup A_0$  (per incapsulamento) che però non conterrebbe le potenze di 2 più grandi di  $n$ .  $\square$

### 3.6. Esercizi e spunti di riflessione.

**Esercizio 3.35. Non per forza aperto o chiuso:** Trovare uno spazio topologico  $(X, \tau)$  e un suo sottoinsieme che non è né aperto, né chiuso. Notare dunque che la frase “ $Y \subset X$  non è aperto” non implica che  $Y$  sia chiuso.

**Esercizio 3.36.** Trovare uno spazio topologico  $(X, \tau)$  e una famiglia infinita di aperti tale che l'intersezione non è aperta. (Suggerimento: prendere la topologia euclidea e la famiglia di palle  $B(0, \frac{1}{n})$  al variare di  $n \in \mathbb{N}$ . Calcolare l'intersezione e mostrare che non è aperta.)

**Esercizio 3.37.** Provare a chiedersi se la Topologia del limite inferiore è T2, connessa, compatta.

---

<sup>2</sup>Non è davvero importante quale aperto scegliere. L'unica cosa da tener conto è che non comprenda tutti i multipli di due e che contenga lo zero.

## 4. GIOCHI TOPOLOGICI

In questa ultima lezione, vengono proposti alcuni giochi di carattere topologico per suscitare interesse.

4.0.1. *Ponti di Königsberg.* E' February 9, 2023; il signor Menezio è in gita a Roma e ha intenzione di fare un percorso che attraversi tutti i ponti di Roma una ed una volta ciascuno. Sapendo che Menezio può scegliere solo il punto iniziale e finale del percorso, sarà in grado di riuscire nel suo intento?

Nella figura successiva si trova un disegno della città di Roma vista dall'alto con i suoi ponti.

Tempo per risolvere il problema....

Un modo alternativo di pensare il problema è disegnare il seguente diagramma e riconoscere che al suo interno ci sono tutte le informazioni per risolvere il problema:

Disegno stilizzato a mo' di grafo

Ciò che abbiamo fatto è un cosiddetto **ragionamento topologico**. La possibilità o meno di effettuare un percorso simile non dipende da alcune proprietà metriche e proiettive quali ad esempio la lunghezza dei ponti ecc. Se tale ragionamento non è convincente provate ad immaginare che la mappa stradale di Roma che avete tra le mani sia un sottile foglio di gomma e che si possa contorcere in tutti i modi possibili, senza lacerarlo e senza far venire a contatto punti distinti. La risposta al problema rimane inalterata.

Il problema proposto è una versione più recente dell'antico problema dei ponti di Königsberg: Nell'antica città di Königsberg, sul fiume Pegel, c'erano due isolette e sette ponti come in Figura Si racconta che il signor C volle fare un percorso che attraversasse tutti i ponti di Königsberg una ed una sola volta ciascuno. Sapendo che il signor C. aveva la possibilità di scegliere sia il punto iniziale che quello finale del percorso, sarà mai stato in grado di portare a termine il suo progetto?

L'idea è quella di sostituire le zone raggiungibili della città con un vertice di un grafo e i collegamenti tra le varie zone con un lato tra due vertici. Le proprietà che determinano il problema sono completamente determinate dal grafo e l'oggetto matematico è estremamente più semplice da maneggiare.

**Definizione 4.1.** Un *grafo* è una coppia  $(V, E)$  dove  $V$  è un insieme (finito) i cui elementi sono i *vertici* (o *nodi*) del grafo ed  $E \subset V \times V$  è un insieme di coppie di vertici che identificano un *lato* del grafo. Se  $u$  è un vertice di un grafo, chiameremo *grado* di  $u$  il numero di lati che contengono  $u$ , contando due volte i lati con entrambi gli estremi in  $u$ .

*Osservazione 4.2.* La somma dei gradi di tutti i nodi di un grafo è uguale al doppio del numero lati; in particolare ogni grafo possiede un numero pari di nodi di grado dispari.

**Definizione 4.3.** Un grafo è detto *Euleriano* se esiste un cammino che passa per tutti i lati una e una sola volta.

Dato il problema dei ponti di Roma o Königsberg, ciò che è sufficiente fare è capire se il grafo che codifica il problema è euleriano oppure no. Un criterio per determinare la non eulerianità di un grafo è il seguente

**Teorema 4.4.** In un grafo euleriano esistono al più due nodi di grado dispari.

*Proof.* Scegliamo una successione di nodi  $v_0, \dots, v_n$  ed una di lati  $\ell_1, \dots, \ell_n$  che formino assieme un cammino passante per tutti i lati una ed una sola volta. Ogni nodo  $u$  diverso da  $v_0$  e  $v_n$  ha grado uguale al doppio del numero di indici  $i$  tali che  $u = v_i$  in quanto ogni volta che si passa epr un vertice c'è sia l'entrata e l'uscita da esso.  $\square$

**Esercizio:** Siano  $v_1, \dots, v_n$  i nodi di un grafo e sia  $A$  la matrice di connessione del grafo, ossia la matrice quadrata di ordine  $n$  il cui coefficiente  $a_{ij}$  è uguale al numero di lati che uniscono il vertice  $v_i$  al vertice  $v_j$ . Dare una descrizione geometrica dei coefficienti delle potenze di  $A$ .

**4.1. Sartoria topologica.** La sartoria topologica lavora un tessuto sottilissimo che può essere piegato, modellato, allungato e deformato a piacere senza strappi né lacerazioni. Le prime semplici lavorazioni consistono in:

- (1) Ritagliare un pezzo  $X$  di tessuto a forma di poligono convesso di  $n \geq 2$  lati;
- (2) Scegliere  $k$  coppie di lati  $X$ , con  $2k \leq n$ , e indicare con lettere distinte i lati appartenenti a coppie distinte.
- (3) Per ognuno dei  $2k$  lati scelti al punto 2, indicare un verso di percorrenza;
- (4) Cucire od incollare i lati di ogni coppia in modo da far coincidere i versi di percorrenza.

Mettere a questo punto i disegni di Tubo, Disco, Sfera, Toro, Piano proiettivo, nastro di Möbius, Bottiglia di Klein.

#### 4.2. Omeomorfismo e oggetti omeomorfi.

**Definizione 4.5.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione.  $f$  si dice *funzione continua* se per ogni  $A \subset Y$  aperto, l'insieme  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$ .

**Definizione 4.6.** Un *omeomorfismo* è una applicazione continua, bigettiva e con inversa continua. Due spazi topologici sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo tra di essi.

Per i topologi due spazi omeomorfi sono indistinguibili; hanno cioè le stesse proprietà geometriche e pertanto possiamo studiarne uno rispetto all'altro indistintamente. In particolare l'omeomorfismo mantiene la connessione, l'essere  $T_1$  o  $T_2$  e la compattezza (provare a verificare per esercizio).

Il topologo quindi non è in grado di distinguere i seguenti oggetti (per le soluzioni si veda [Man15, Chapter 2]):

- Intervalli aperti di tutti i tipi.
- Il quadrato:  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$  e il cerchio  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .
- Il piano puntato  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ; il cilindro circolare  $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ; L'iperboloide ad una foglia  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ .
- Qualsiasi coppia di palle aperte in  $\mathbb{R}^n$ .
- La sfera  $S^n$  meno un punto (il polo nord) e lo spazio  $\mathbb{R}^n$  (**proiezione stereografica**).
- Se ha le corna oppure no.
- $S^n \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

Trovare esempi di insiemi non omeomorfi: ad esempio intervalli con estremi aperti e chiusi non uguali; cose compatte e no, cose  $T_2$  e no. Fondamentalmente usare gli invarianti introdotti per distruggere tutto.

#### REFERENCES

- [Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR 0463157
- [Man15] Marco Manetti, *Topology*, Unitext, vol. 91, Springer, Cham, 2015, Translated from the 2014 Italian edition by Simon G. Chiossi, La Matematica per il 3+2. MR 3287286