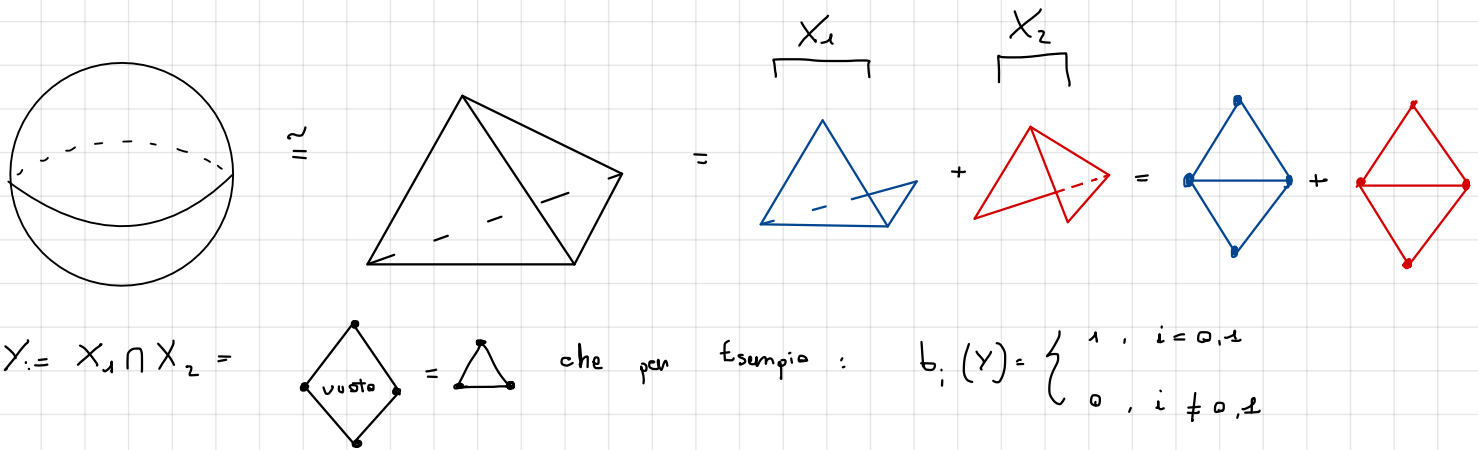


Testo: Numeri di Betti di S^2 .

Soluzione



Dunque:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 b_2(Y) & \rightarrow & b_2(X_1) + b_2(X_2) & \rightarrow & b_2(S^2) & \rightarrow & b_1(Y) & \rightarrow & b_1(X_1) + b_1(X_2) & \rightarrow & b_1(S^2) & \rightarrow & b_0(Y) & \rightarrow & b_0(X_1) + b_0(X_2) & \rightarrow & b_0(Y) & \rightarrow 0 \\
 \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\
 0 & & 0+0 & & x & & 1 & & 0+0 & & y & & 1 & & 1+1=2 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ cioè $b_2(S^2) = 1$

$y - 1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow b_1(S^2) = 0$. Dunque $b_i(S^2) = \begin{cases} 1, & i=0,2 \\ 0, & i \neq 0,2 \end{cases}$

Testo: Numeri di Betti di S^n . ($n \geq 1$)

Soluzione

$$S^1 = \bigcirc = \triangle \rightsquigarrow \text{Esempio} \quad b_i(S^1) = \begin{cases} 1, & i=0,1 \\ 0, & i \neq 0,1 \end{cases}$$

$$S^2 = \bigodot \rightsquigarrow \text{Esercizio precedente} \quad b_i(S^2) = \begin{cases} 1, & i=0,2 \\ 0, & i \neq 0,2 \end{cases}$$

$$\text{Claim: } b_i(S^n) = \begin{cases} 1, & i=0,n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Capire come dire che S^n è dato da 2 n -complessi contrattibili che si intersecano in S^{n-1} .

(Visivamente: $\bigcirc = \text{arco} + \text{arco} \quad \text{e} \quad \bigodot = \bigodot + \bigodot \dots \text{ma dopo?}$)

Proiezione stereografica (?)

A questo punto per induzione:

• passo base ($n=1$): ok.

• passo induttivo ($n-1 \rightarrow n$): $D^n = n$ -complesso contrattibile

$$\begin{array}{ccccccc} b_1(D^n) + b_1(D^n) & \rightarrow & b_1(S^n) & \rightarrow & b_0(S^{n-1}) & \rightarrow & b_0(D^n) + b_0(D^n) \rightarrow b_0(S^n) \rightarrow 0 \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ 0+0 & & x & & 1 & & 1+1 & & 1 \end{array}$$

$$\cdot x - 1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x = b_1(S^n) = 0$$

Ora per $i > 1$:

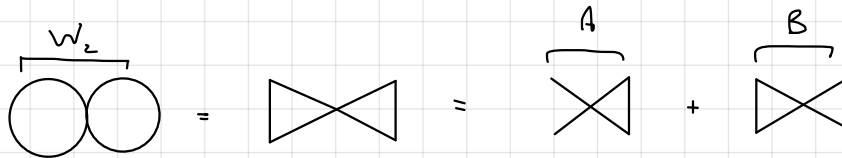
$$\begin{array}{ccccccc} b_i(D^n) + b_i(D^n) & \rightarrow & b_i(S^n) & \rightarrow & b_{i-1}(S^{n-1}) & \rightarrow & b_{i-1}(D^n) + b_{i-1}(D^n) \\ \text{"} & & & & & & \text{"} \\ 0+0 & & & & & & 0+0 \end{array}$$

$$\Rightarrow b_i(S^n) = b_{i-1}(S^{n-1}) \text{ e per hp. induttiva } b_{i-1}(S^{n-1}) = 1 \Leftrightarrow i-1 = 0 \vee n-1$$

$$\Leftrightarrow i = 1 \vee n \text{ ma } i > 1 \text{ per hp. } \Rightarrow b_i(S^n) = 1 \Leftrightarrow i = n.$$

Testo: Numeri di Betti del wedge di z circonferenze (e poi n).

Soluzione



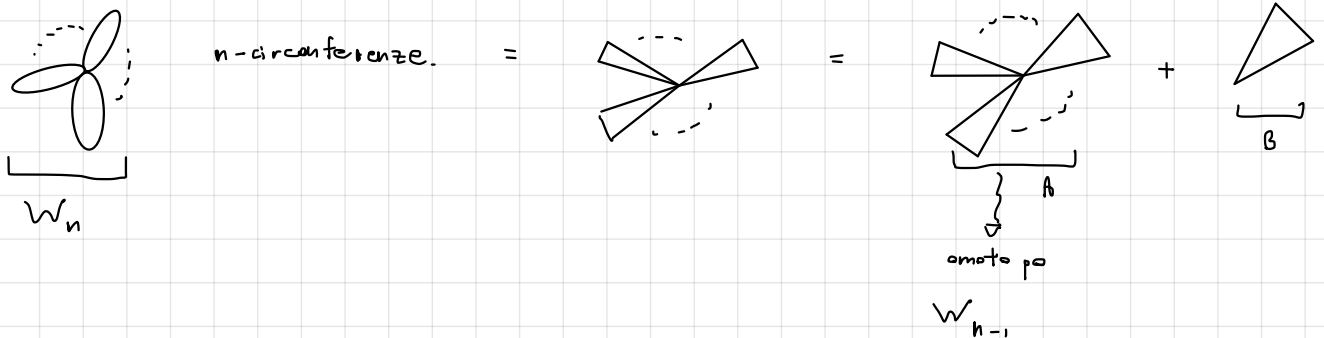
$$A \text{ e } B \text{ omotopi a } \triangle \Rightarrow b_i(A) = b_i(B) = \begin{cases} 1, & i=0, 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$A \cap B = \times \sim \text{si retrae su un punto} \quad b_i(A \cap B) = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} b_1(A \cap B) & \rightarrow & b_1(A) + b_1(B) & \rightarrow & b_1(W_2) & \rightarrow & b_0(A \cap B) \rightarrow b_0(A) + b_0(B) \rightarrow b_0(W_2) \rightarrow 0 \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ 0 & & 1+1 & & x & & 1 & & 1+1 & & 1 \end{array}$$

$$x - x + 1 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = b_1(W_2) = 2.$$

$$\text{Per } i > 1 \text{ ci sono tutti zeri} \Rightarrow b_i(W_2) = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 2, & i=1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\text{Per induzione supponiamo } b_i(W_{n-1}) = \begin{cases} 1, & i=0 \\ n-1, & i=1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{Il claim ci viene da } W_2).$$

$$A \cap B = \angle \sim \text{omotopo a pt.}$$

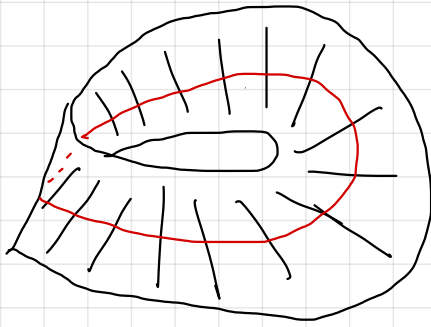
$$\begin{array}{ccccccc} b_1(A \cap B) & \rightarrow & b_1(A) + b_1(B) & \rightarrow & b_1(W_n) & \rightarrow & b_0(A \cap B) \rightarrow b_0(A) + b_0(B) \rightarrow b_0(W_n) \rightarrow 0 \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ 0 & & n-1+1 & & x & & 1 & & 1+1 & & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow n - x + 1 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = b_1(W_n) = n. \quad \text{Per } i > 1 \text{ ho tutti } 0. \text{ Dunque}$$

$$\text{l'induzione \u00e9 provata e } b_i(W_n) = \begin{cases} n, & i=1 \\ 1, & i=0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Testo : numeri di Betti del nastro di Möbius

Soluzione :



~ si retrae su S^1

$$H_i(M) = H_i(S^1) = \begin{cases} 1, & i = 0, 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teste: $S^1 \neq \mathbb{R}$

Soluzione

• Argomento di connessione: In generale se $f: M \rightarrow N$ omeo e $B \subseteq M$. Allora

$f^c: M \setminus B \rightarrow N \setminus f(B)$ omeo. Dunque se $p \in S^1$ punto e $\alpha: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ omeo allora

$\alpha^c: S^1 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\alpha(p)\}$ omeo ma $S^1 \setminus \{p\}$ connesso e $\mathbb{R} \setminus \{\alpha(p)\}$ sconnesso.

• Betti: $b_1(S^1) = 1$ ma $b_1(\mathbb{R}) = 0 \Rightarrow$ non omotopi $\Rightarrow$ non omeo.

Testo: Segmento $[a, b]$ omotopicamente eq al punto

dim.

$$f: [a, b] \longrightarrow \{a\}$$

$$t \longmapsto a$$

$$g: \{a\} \longrightarrow [a, b]$$

$$a \longmapsto a$$

$$\text{Qv2} \quad f \circ g: \{a\} \longrightarrow \{a\} = \text{id}_{\{a\}}$$

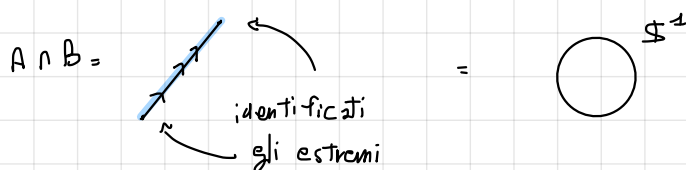
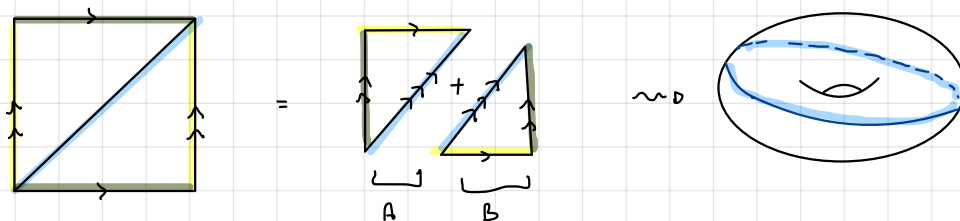
$$g \circ f: [a, b] \longrightarrow [a, b] \quad (g \circ f)(t) = a, \text{ devo vedere che } g \circ f \sim \text{id}_{[a, b]}$$

$$H: [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow [a, b] \quad \text{s.c.} \quad H_0 = \text{id}_{[a, b]} \quad H_1(t) = a \quad \forall t \in [a, b].$$

$$H_s(t) = a + s(t-a)$$

Testo : Numeri di Betti del toro

dim.



Dunque :

$$\begin{array}{ccccccccccc} b_2(A) + b_2(B) & \rightarrow & b_2(T) & \rightarrow & b_1(A \cap B) & \rightarrow & b_1(A) + b_1(B) & \rightarrow & b_1(T) & \rightarrow & b_0(A \cap B) & \rightarrow & b_0(A) + b_0(B) & \rightarrow & b_0(T) \rightarrow 0 \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ 0+0 & & x & & 1 & & 1+1 & & y & & 1 & & 1+1 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 1 + 2 - y + 1 - 2 + 1 = 0 & \Rightarrow x = y - 1 \\ 1 \geq x & \Rightarrow x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$$

↑
iniettività

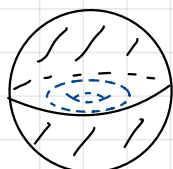
Consideriamo $\mathbb{R}^3 = (\overbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{T}}^X) \cup \overbrace{\overline{T}}^Y$ dove $\overline{T}$ = toro pieno



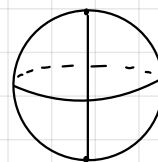
Allora $X \cap Y = T$ (toro).

$$\overline{T} \sim_{\text{omotopo}} S^1 \Rightarrow H_i(\overline{T}) = \begin{cases} 1, & i=0,1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$X \sim_{\text{omotopo}} \mathbb{D}^3 \setminus \overline{T} =$$



$$\sim_{\text{omotopo}} S^2 \cup \text{segmento} = S^2$$



Ora, $Z := S^2 \cap s = \{2 \text{ punti}\}$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc} d_2(Z) & \rightarrow & d_2(S^2) + d_2(s) & \rightarrow & d_2(X) & \rightarrow & d_1(Z) & \rightarrow & d_1(S^2) + d_1(s) & \rightarrow & d_1(X) & \rightarrow & d_0(Z) & \rightarrow & d_0(S^2) + d_0(s) & \rightarrow & d_0(X) \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ 0 & & 1+0 & & 0 & & 0 & & 0+0 & & 2 & & 1+1 & & 1 & & 0 \end{array} \right)$$

Non serve per risolvere es. seguendo questa strada ma può essere utile se prima fanno passaggi differenti

$$\left(1 - d_2(X) = 0 \Rightarrow d_2(X) = 1 \right) \quad d_1(X) - 2 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow d_1(X) = 1$$

Torniamo a $\mathbb{R}^3 = X \cup Y$:

$$\begin{array}{ccccccc} d_2(\mathbb{R}^3) & \rightarrow & d_1(T) & \rightarrow & d_1(X) + d_1(Y) & \rightarrow & d_1(\mathbb{R}^3) \\ \text{"} & & & & \text{"} & & \text{"} \\ 0 & & & & 1+1 & & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} d_1(T) = 2 \\ d_2(T) = 2 - 1 = 1 \end{array}$$

Testo: Complesso simpliciale di dimensione n , X . Allora $b_k(X) = 0 \quad \forall k > n$.

dim. Facciamolo per induzione forte sulla dimensione n :

Passo base: $n=0$. Il complesso simpliciale è un numero finito di punti $\{p_1, \dots, p_t\}$.

$$\text{Per } b_k(\{p_1, \dots, p_t\}) = b_k(p_1) + \dots + b_k(p_t) = \begin{cases} n, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$$

Passo induttivo: supponiamo che la tesi sia vera per $m < n$, dimostriamolo per n .

Consideriamo X di dimensione n e $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 complessi simpliciali.

Per definizione $\dim(X_1) \leq \dim X$, $\dim(X_2) \leq \dim X$ e $\dim(X_1 \cap X_2) < \dim X$ ($X_1 \cap X_2$

è un'unione finita di facce di simplessi di dim. al più n , dunque è unione finita di simplessi di dim. al più $n-1$). Per h.p. induttiva $b_{k-1}(X_1 \cap X_2) = 0 \quad \forall k-1 > n-1 (\Leftrightarrow \forall k > n)$. Dunque per r.v.:

$$b_k(X_1) + b_k(X_2) \rightarrow b_k(X) \rightarrow b_{k-1}(X_1 \cap X_2)$$

Dunque se $k > n \Rightarrow k-1 > n-1 \Rightarrow b_{k-1}(X_1 \cap X_2) = 0$. Vorremmo dire che sia $b_k(X_1)$ sia $b_k(X_2)$

sono 0 per $k > n$. Facciamolo per X_1 , analogo per X_2 . Posso scomporre nuovamente

$X_1 = R_1^{(1)} \cup R_2^{(1)}$; notiamo, però, che ogni volta che scomponiamo (con scomposizione non banale

cioè se $Z = Z_1 \cup Z_2 \Rightarrow Z_1, Z_2 \neq \emptyset$) $\Rightarrow \# \text{ simplessi di } R_1^{(1)} < \# \text{ simplessi di } X$ e

$\# \text{ simplessi di } R_2^{(1)} < \# \text{ simplessi di } X$. Iterando dunque le scomposizioni sempre del I

termine $R_1^{(i)}$ ($R_1^{(i)} = R_1^{(i+1)} \cup R_2^{(i+1)}$) si ottiene che per finitezza dei simplessi

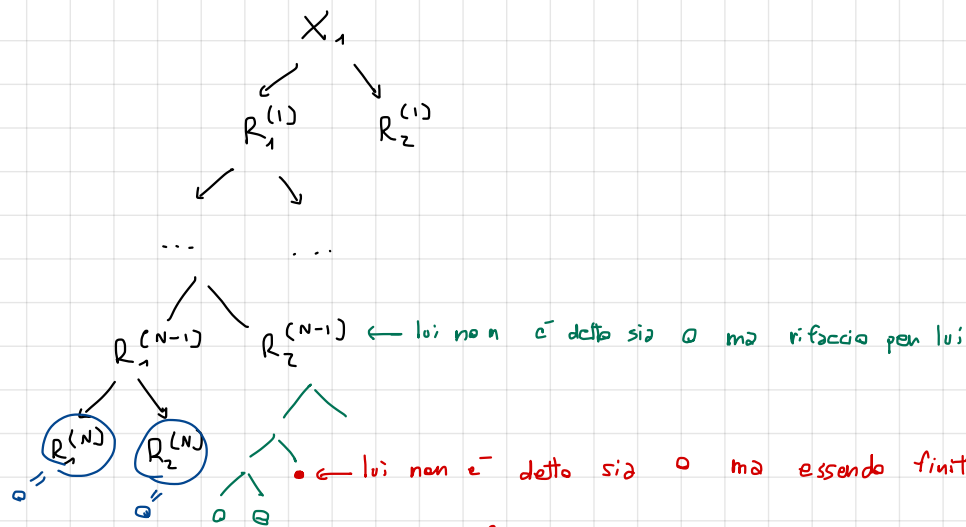
$\exists N$ t.c. $R_1^{(N)}$ e $R_2^{(N)}$ sono o il vuoto o un simpleso che è contrattile. In

entrambi i casi $b_k(R_1^{(N)}) = b_k(R_2^{(N)}) = 0 \quad \forall k \geq 1$. Allora:

$$\begin{array}{ccccccc} b_k(R_1^{(N)}) + b_k(R_2^{(N)}) & \rightarrow & b_k(R_1^{(N-1)}) & \rightarrow & b_{k-1}(R_1^{(N)} \cap R_2^{(N)}) & (k > n) \\ \text{"} & & & & \text{"} & & \\ 0 + 0 & & & & 0 & \text{per lo stesso motivo di prima} \end{array}$$

$$\Rightarrow b_k(R_1^{(N-1)}) = 0.$$

Notiamo questo:



numero finito di volte che posso andare a "dx" senza trovare il voto

e dunque e' tutto 0