

Il Lemma di Sperner e il Teorema di Monsky

Luca Bruni
Agosto 2026

Origin. Articolo pubblicato per la prima volta nel *Giornalino degli Open Days* n. 10, febbraio 2020.

Overview. Un percorso tra triangolazioni, parità e geometria per arrivare al teorema di Monsky sull'impossibilità di dividere un quadrato in un numero dispari di triangoli di uguale area.

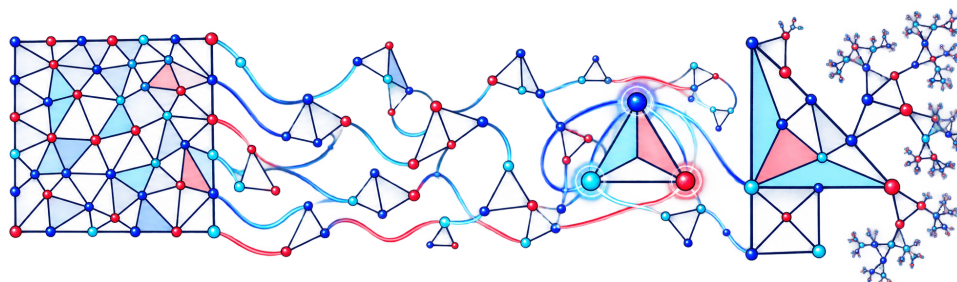
Abstract. Questa dispensa presenta il Lemma di Sperner, le sue applicazioni e la colorazione 2-adica del piano. Questi strumenti permettono di seguire passo dopo passo l'argomento combinatorio e algebrico che porta al teorema di Monsky.

Last update: 19 agosto 2026.

Menezio (Luca Bruni) · menezio96@gmail.com · sgpg.it

Indice

1	Introduzione	2
2	Il Lemma di Sperner	2
3	Coloriamo il piano	6
4	Il teorema di Monsky	9



1 Introduzione

Cominciamo con l'enunciare un problema geometrico:

Problema 1. Suddividere un quadrato in un numero pari di triangoli di uguale area.

Una semplice soluzione del problema potrebbe essere la seguente: supponiamo che vogliamo dividere il quadrato in $2n$ triangoli della stessa area, allora dividiamo i lati orizzontali del quadrato in n segmenti di lunghezza uguale, tracciamo gli n rettangoli individuati dai punti e suddividiamo ogni rettangolo in due triangoli mediante la diagonale.

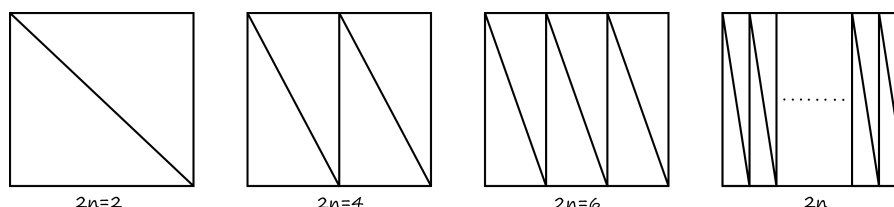


Figura 1: Suddivisione di un quadrato in un numero pari di triangoli con la stessa area.

Proviamo adesso a risolvere il seguente problema il cui enunciato è molto simile:

Problema 2. Suddividere un quadrato in un numero dispari di triangoli di uguale area.

Dopo alcuni tentativi ci rendiamo conto che il problema è notevolmente più complicato del precedente e sembra molto difficile trovarne una soluzione.

Il primo a pensare a questo problema fu il matematico Fred Richman¹ nel 1965 il quale avrebbe voluto includere questo quesito nel testo di un esame, ma, non riuscendo a risolverlo e non trovando alcuna referenza al riguardo, decise invece di proporlo pubblicamente nella rivista *American Mathematical Monthly*². Pur nella sua semplicissima formulazione, il problema rimase irrisolto per ben cinque anni: il primo a fornire una risposta al riguardo fu il matematico Paul Monsky³ nel 1970. Il problema non ha soluzione: Monsky dimostrò l'impossibilità di suddividere un quadrato in un numero dispari di triangoli di ugual area combinando alcune tecniche combinatorie e algebriche. Quello che cercheremo di fare in questo articolo è ripercorrere la brillante dimostrazione di Monsky illustrandone i seguenti passi:

- Triangolazioni di poligoni, colorazioni e lemma di Sperner.
- Colorazione del piano cartesiano e in particolare del quadrato I di coordinate $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ con l'ausilio della *norma 2-adica*.
- L'"area" di un opportuno triangolo all'interno del quadrato è "troppo grande".

2 Il Lemma di Sperner

Lo scopo di questa sezione è enunciare e dimostrare il Lemma di Sperner e dare qualche informazione sulle sue applicazioni; anche se a primo impatto sembra solamente un fatto curioso, esistono risultati matematici (e non solo) di notevole interesse basati su questo simpatico lemma.

¹Fred Richman, Matematico americano, ha ricoperto il ruolo di docente presso la "New Mexico State University" e in seguito presso la "Florida Atlantic University".

²Rivista di matematica fondata da Benjamin Finkel nel 1894. Attualmente viene pubblicata 10 volte all'anno dalla Mathematical Association of America. Contiene numerosi articoli di ampio interesse rivolti a tutta la comunità matematica.

³Paul Monsky, 17 giugno 1936. Matematico americano, ha ricoperto il ruolo di docente alla "Brandeis University" presso Boston, Massachusetts.

2.1 Il Lemma di Sperner

Cominciamo con qualche definizione introduttiva; d'ora in avanti assumeremo sempre che i poligoni siano *semplici*, ovvero che i lati del poligono non si intersechino tra di loro.

Dato un poligono P una *triangolazione di P* è una suddivisione di P in un numero finito di triangoli in modo che ogni due triangoli della suddivisione si intersechino o esattamente in un lato o esattamente in un vertice.

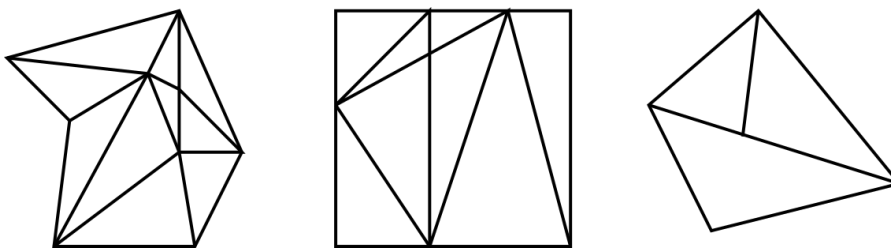


Figura 2: Le prime due figure da sinistra sono esempi di triangolazioni. La terza figura NON è una triangolazione.

Una triangolazione è detta *colorata* se ogni vertice della triangolazione è colorato con il numero 1, 2 o 3; in questo caso chiameremo un lato della triangolazione *12-lato*, *23-lato* o *31-lato* se i vertici del lato che stiamo considerando sono colorati rispettivamente di (1-2), (2-3), (3-1). Infine, data una triangolazione, diremo che un triangolo è *completo* se ha tutti i vertici di colore diverso (si veda la Figura 3).

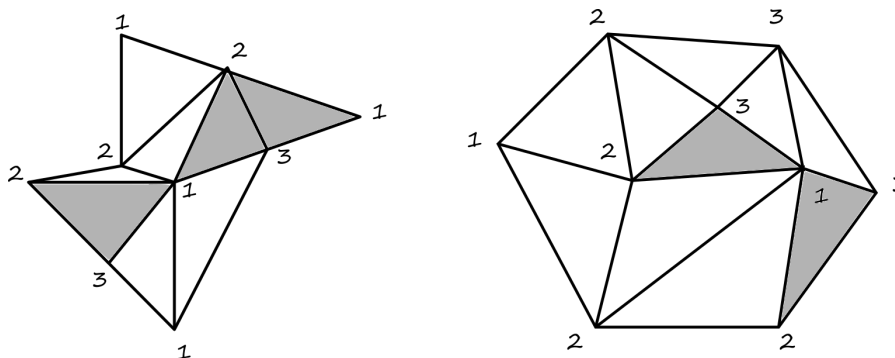


Figura 3: Esempi di colorazioni e di triangoli completi (in grigio).

Dopo queste piccole nozioni preliminari siamo pronti per enunciare il lemma di Sperner:

Lemma 1 (Sperner, 1928). *Sia P un poligono e sia data una sua triangolazione colorata. Allora il numero di triangoli completi ha la stessa parità del numero di 12-lati sul bordo del poligono.*

Prima di inoltrarci nella dimostrazione vera e propria osserviamo questa curiosa conseguenza: se nella triangolazione colorata ci sono un numero dispari di 12-lati nel bordo, allora **c'è almeno un triangolo completo**. Pertanto nelle figure successive, anche se non conosciamo come sono colorati i vertici centrali siamo comunque certi che ci sarà da qualche parte un triangolo completo!

Dimostrazione. Si tratta di un doppio conteggio: mettiamo un punto da ogni parte di un 12-segmento (si veda la Figura 5). Quello che vogliamo fare è contare il numero di punti nella parte interna del triangolo e mostrare che la sua parità è uguale sia al numero dei triangoli completi, sia al numero di 12-lati sul bordo. Notiamo che ogni segmento che **non** si trova sul bordo del poligono contribuisce o per 0 punti (se non è un 12-lato) e per 2 punti (se è un 12-lato); invece un segmento che si trova sul bordo contribuisce per 0 punti o per 1 punto a seconda che non sia un 12-lato o che lo sia. Abbiamo in pratica dimostrato che *il numero di punti nell'interno del poligono ha la stessa*

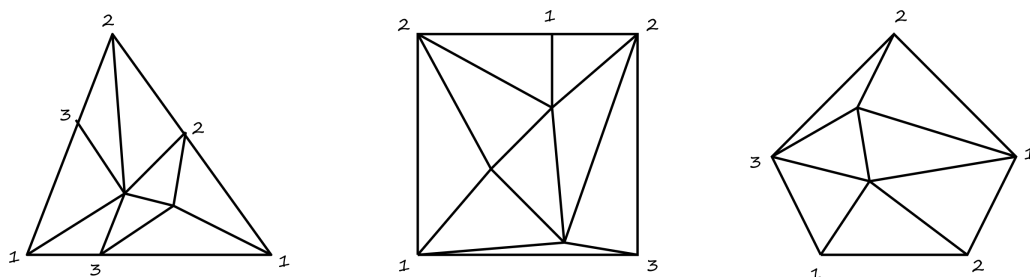


Figura 4: In qualsiasi modo completiamo la colorazione dei poligoni in figura, siamo sicuri che ci sarà almeno un triangolo completo.

parità del numero di 12-lati che si trova sul bordo. Adesso contiamo il numero di punti che si trova all'interno di ogni triangolo della triangolazione. I triangoli completi hanno per costruzione un solo 12-lato e di conseguenza al loro interno avranno soltanto un punto. Un qualsiasi altro triangolo della triangolazione, invece, avrà un numero pari di punti al proprio interno come si può facilmente osservare considerando i pochi casi possibili (si veda anche la Figura 5).

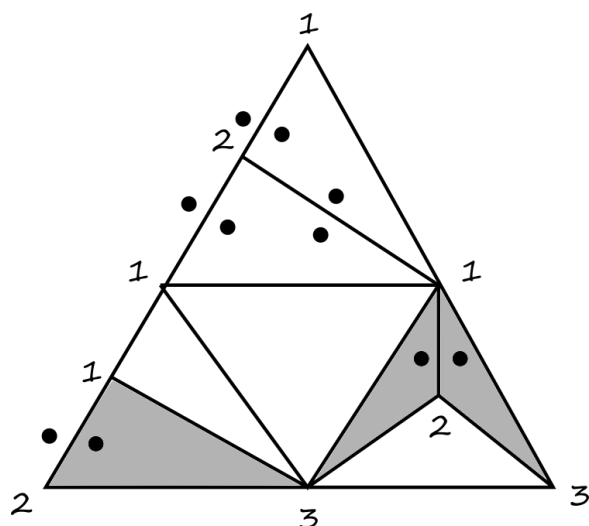


Figura 5: Il procedimento dimostrativo di double-counting nel caso di un triangolo.

Ma allora abbiamo anche mostrato che *il numero di triangoli completi ha la stessa parità nel numero di punti interni del poligono*. Combinando l'informazione appena trovata con quella precedente si ottiene la tesi. $\square$

Basandoci sulla dimostrazione del Lemma di Sperner, è possibile fornire il seguente metodo per "scovare" dove sono i triangoli completi nel caso in cui questi siano in numero dispari: prendiamo un poligono a caso e facciamone una triangolazione. Coloriamo i vertici in modo che ci sia un numero dispari di 12-lati sul bordo. Grazie all'osservazione fatta sopra siamo sicuri che da qualche parte c'è un triangolo completo. Immaginiamoci che i triangoli della triangolazione siano isole e costruiamo un *ponte* tra due isole se e solo se il lato che le separa è un 12-lato. Allo stesso modo costruiamo un ponte tra un'isola e l'esterno del poligono se e solo se il lato che li separa è un 12-lato. Se adesso proviamo a percorrere i sentieri formati dai ponti che partono dall'esterno del poligono siamo sicuri di trovare almeno un triangolo completo (lasciamo al lettore il piacere di spiegare perché questo accade).

Prima di andare oltre, vogliamo soffermarci su un altro fatto che sarà cruciale nella dimostrazione del teorema di Monsky: grazie al seguente risultato (e a una opportuna colorazione che vedremo nella prossima sezione) saremo infatti in grado di utilizzare il Lemma di Sperner su una generica triangolazione del quadrato I del piano cartesiano trovando al suo interno un triangolo completo.

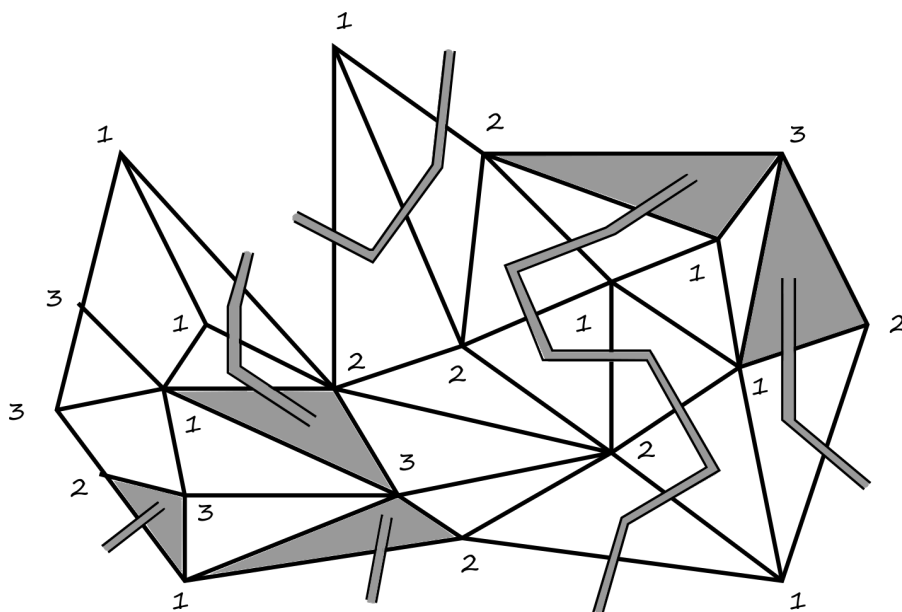


Figura 6: Il metodo dei ponti per la ricerca dei triangoli completi.

Anche in questo caso, la dimostrazione è dovuta a Sperner ed è interpretabile come una versione unidimensionale del lemma che abbiamo già analizzato.

Lemma 2 (Lemma di Sperner unidimensionale). *Sia S un 12-segmento. Suddividiamo S in lati più piccoli colorando i vertici della suddivisione con i colori 1 e 2; allora il numero di 12-lati della suddivisione è dispari.*

Dimostrazione. Si può mostrare questo risultato per induzione sul numero di punti della suddivisione: se il segmento è suddiviso da 0 punti, allora ho esattamente un 12-lato (coincide con S stesso) e dunque la tesi è vera. Supponiamo adesso che la tesi sia vera per ogni suddivisione di n punti e mostriamo che è vera per una di $n + 1$. Qualsiasi suddivisione con $n + 1$ punti possiamo ottenerla da una suddivisione con n punti aggiungendone semplicemente uno da qualche parte. Analizziamo cosa succede alla parità nei vari casi (si veda la Figura 7):

- *Aggiungiamo un punto di colore 1 tra due di colore 1:* si formano due 11-segmenti e si cancella un 11-lato e dunque il numero di 12-lati non cambia;
- *Aggiungiamo un punto di colore 2 tra due punti di colore 2:* Analogò al precedente;
- *Aggiungiamo un punto di colore 1 tra due di colore 2 (o viceversa):* si formano due 12-lati e si cancella un 11-lato. Dunque non si altera la parità del numero degli 12-lati;
- *Aggiungiamo un punto di colore 1 tra uno di colore 1 e uno di colore 2 (o viceversa):* si forma un 12-lato e un 11-lato e si cancella un 12-lato. Dunque il numero di 12-lati non cambia;

Dunque aggiungendo un punto colorato la parità non cambia e possiamo concludere grazie all'ipotesi induttiva.

□

2.2 Possibili applicazioni

Il risultato enunciato è soltanto la versione bidimensionale del lemma, ma esistono delle generalizzazioni nel caso multidimensionale⁴.

⁴[Wikipedia, Sperner's Lemma.](#)

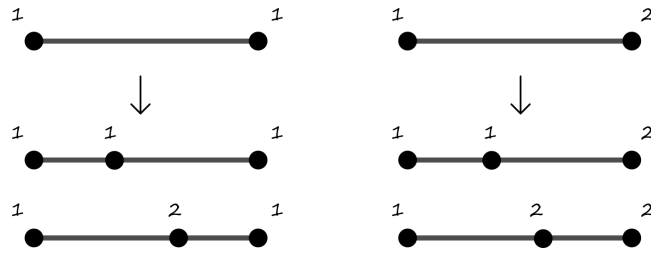


Figura 7: I possibili scenari dopo aver aggiunto un punto alla suddivisione.

Anche se a prima vista sembra solamente un bizzarro risultato, è stato dimostrato che il lemma di Sperner è equivalente a un importante risultato di topologia algebrica noto come *Teorema del punto fisso di Brouwer*⁵.

Oltre all'applicazione che vedremo di seguito, il lemma di Sperner è stato utilizzato per implementare alcuni algoritmi per il calcolo di *zeri di funzioni*⁶.

Tale risultato è stato anche utilizzato per la risoluzione di alcuni problemi di *"divisione equa delle risorse"*. Supponiamo che le nostre risorse siano modellizzate da una torta; quello che vogliamo fare è suddividere la torta in tanti pezzi quante sono le persone tra cui vogliamo distribuire le risorse e che ogni persona ritenga che il proprio pezzo sia "migliore" (rispetto alle sue valutazioni) di quello di tutti gli altri. Grazie al lemma di Sperner sono stati implementati dei metodi per risolvere questo problema⁷.

Un'ultima applicazione è in ambito economico: si può utilizzare tale risultato per trovare situazioni di *"equilibrio"* in transazioni finanziarie.

3 Coloriamo il piano

Scopo di questa sezione è riuscire a colorare tutto il piano cartesiano in modo accorto per applicare il lemma di Sperner al quadrato $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Per farlo abbiamo bisogno questa volta di qualche risultato algebrico:

3.1 La norma 2-adica

La prima cosa che facciamo è dire che cosa è la norma 2-adica per l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Sia $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Osserviamo che è possibile scrivere x in modo unico come $x = 2^n \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ primi tra loro e non divisibili per 2. Definiamo la *valutazione 2-adica di x* come

$$v_2(x) = v_2\left(2^n \frac{a}{b}\right) = n.$$

Se $x = 0$ poniamo $v_2(0) = \infty$. Definiamo inoltre la *norma 2-adica di x* come:

$$|x|_2 = 2^{-v_2(x)}$$

Nel caso in cui $x = 0$ poniamo $|x|_2 = 0$.

La definizione sembra molto astratta, ma facciamo alcuni esempi per capire meglio cosa succede:

⁵Wikipedia, Brouwer fixed-point theorem.

⁶Wikipedia, Simmons-Su protocols.

⁷Wikipedia, Competitive equilibrium.

$$\begin{aligned}\left|\frac{12}{37}\right|_2 &= 2^{-v_2(2^2 \frac{3}{37})} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ \left|\frac{3}{5}\right|_2 &= 2^{-v_2(2^0 \frac{3}{5})} = 2^{-0} = 1 \\ |1024|_2 &= 2^{-v_2(2^{10} \cdot 1)} = 2^{-10} = \frac{1}{1024}\end{aligned}$$

Facciamo inoltre un'osservazione cruciale che ci servirà più avanti: *la norma 2-adica di un qualsiasi numero intero dispari d è uguale a 1*. Infatti un numero intero dispari lo possiamo sempre scrivere come $2m + 1$ per un certo numero intero m e dunque

$$|d|_2 = |2m + 1|_2 = 2^{-v_2(2^0(2m+1))} = 2^{-0} = 1.$$

La norma 2-adica gode di alcune proprietà algebriche interessanti; ne vediamo alcune che saranno utili più avanti:

1. $|x|_2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $|0|_2 = 0$;
Infatti la norma 2-adica è una potenza di 2 e dunque sempre maggiore di zero. Il fatto che $|0|_2 = 0$ segue direttamente dalle definizioni

2. $|x|_2 |y|_2 = |xy|_2$;

Infatti siano $x = 2^n \frac{a}{b}$ e $y = 2^m \frac{a'}{b'}$ con a, b, a', b' come sopra, allora, poiché $xy = 2^{n+m} \frac{aa'}{bb'}$,

$$|xy|_2 = 2^{-v_2(xy)} = 2^{-(n+m)} = 2^{-n} \cdot 2^{-m} = 2^{-v_2(x)} 2^{-v_2(y)} = |x|_2 |y|_2$$

3. $|x + y|_2 \leq \max\{|x|_2, |y|_2\}$. Inoltre se $|x|_2 < |y|_2$ allora $|x + y|_2 = |y|_2$; *Infatti* siano $x = 2^n \frac{a}{b}$ e $y = 2^m \frac{a'}{b'}$, allora $x + y = 2^n \left(\frac{a}{b} + 2^{m-n} \frac{a'}{b'} \right)$. Dato che stiamo supponendo $n \leq m$, allora la quantità tra parentesi può contenere fattori 2 solo al numeratore. Di conseguenza:

$$|x + y|_2 = 2^{-v_2(x+y)} \leq 2^{-n} = \max\{|x|_2, |y|_2\}$$

In particolare se vale la disuguaglianza stretta tra le norme, allora il minore uguale diventa un uguale e si ha la tesi.

Concludiamo facendo notare che le proprietà dimostrate possono essere enunciate in un contesto molto più generale: il numero primo 2 non ha nessuna caratteristica speciale rispetto agli altri primi p in questo contesto; è infatti possibile definire una valutazione e una norma p -adica nel medesimo modo e le proprietà sarebbero state comunque verificate.

3.2 Il teorema di Chevalley

Come già annunciato più volte, il nostro scopo è colorare il piano: lo vogliamo fare mediante la norma 2-adica delle coordinate dei punti del piano. Sorge però un problema: abbiamo definito la norma solamente sui punti del piano che hanno entrambe coordinate le razionali; quello che vorremmo fare è estendere tale valutazione a tutti i punti con coordinate reali e vorremmo che tale estensione continuasse a verificare le proprietà (1), (2), (3). In alcuni casi questa estensione è naturale: se vogliamo definire $|\sqrt{2}|_2$ osserviamo che deve valere che $|\sqrt{2}|_2 |\sqrt{2}|_2 = |2|_2 = \frac{1}{2}$; ne ricaviamo che $|\sqrt{2}|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Con questo semplice sistema possiamo estendere la norma 2-adica a tutte le radici, ma

come ben sappiamo i numeri reali non sono solamente radici; come facciamo dunque ad estendere la norma 2-adica per numeri come π ? Per fare questo ci viene in aiuto un importante teorema dovuto al matematico Claude Chevalley⁸. La generalità e la dimostrazione del teorema fa uso di strumenti matematici piuttosto avanzanti e pertanto enunciamo, senza dimostrarlo, soltanto il corollario di cui abbiamo bisogno:

Teorema 1 (Chevalley). *E' possibile estendere la norma 2-adica definita sui numeri razionali a tutti i numeri reali $\mathbb{R}$ in modo che le proprietà (1), (2), (3) siano ancora verificate.*

3.3 La colorazione

Grazie alla norma 2-adica siamo finalmente pronti a colorare tutto il piano. Prendiamo un'estensione della norma 2-adica a tutti i numeri reali e partizioniamo il piano in 3 parti che coloriamo rispettivamente di 1, 2 e 3:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x, y) : |x|_2 < 1, |y|_2 < 1\} \\ S_2 &:= \{(x, y) : |x|_2 \geq 1, |x|_2 \geq |y|_2\} \\ S_3 &:= \{(x, y) : |y|_2 \geq 1, |y|_2 > |x|_2\} \end{aligned}$$

Il quadrato che vogliamo analizzare è $I = [0, 1] \times [0, 1]$ che ha vertici nei punti $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$; cominciamo col chiederci di che colore sono questi punti; come già osservato $|0|_2 = 0$ e $|1|_2 = 1$ e dunque otteniamo:

$$\begin{aligned} A = (0, 0) &\in S_1 & B = (1, 0) &\in S_2 \\ C = (1, 1) &\in S_2 & D = (0, 1) &\in S_3 \end{aligned}$$

Osserviamo che è impossibile realizzare un'immagine raffigurante la colorazione in quanto la norma 2-adica si comporta in maniera strana rispetto al numero di cui stiamo facendo la norma: un numero molto grande come 2^{100} ha infatti una norma 2-adica molto piccola e viceversa. Quello che vogliamo fare è però capire di che colore potrebbero essere i punti che stanno nei vari lati del quadrato. I punti del lato $\overline{AB}$ sono caratterizzati dal fatto che la coordinata y è uguale a 0; di conseguenza $|y|_2 = 0$ e dunque sicuramente tali punti **non** possono stare in S_3 . Dunque il lato $\overline{AB}$ è formato solo da punti di colore 1 o 2. Con ragionamenti del tutto analoghi si osserva facilmente che:

Segmento	Colori possibili
$\overline{AB}$	1 o 2
$\overline{BC}$	2 o 3
$\overline{CD}$	2 o 3
$\overline{DA}$	3 o 1

Prima di inoltrarci nella dimostrazione vera e propria del teorema di Monsky, abbiamo bisogno di qualche altra proprietà della colorazione che abbiamo creato. In particolare vogliamo trovare una stima della norma 2-adica dell'area di un triangolo completo nel piano colorato. Per cominciare osserviamo che la colorazione 2-adica è invariante per traslazione rispetto a punti di colore 1 (cioè il colore di un punto non cambia se lo traslo per un vettore che identifica un punto di colore 1). La dimostrazione di questo fatto segue dalle proprietà della norma 2-adica che abbiamo già mostrato: sia $(a, b) \in S_1$, allora $|a|_2 = |-a|_2 < 1$ e $|b|_2 = |-b|_2 < 1$. Verifichiamo ora che se $(x, y) \in S_i$, allora $(x - a, y - b) \in S_i$:

⁸Claude Chevalley, 11 febbraio 1909 – 28 giugno 1984. Matematico francese; diede importanti contributi alla teoria dei numeri, alla geometria algebrica, alla teoria dei campi di classi, alla teoria dei gruppi finiti e alla teoria dei gruppi algebrici.

$i = 1$) Per ipotesi $|x|_2 < 1$ e $|y|_2 < 1$. Allora $|x - a|_2 = |x + (-a)|_2$ è uguale alla norma maggiore fra $|x|_2$ e $|a|_2$ per le proprietà della norma. In ogni caso $|x - a|_2 < 1$. In maniera analoga si mostra $|y - b|_2 < 1$;

$i = 2$) Per ipotesi $|x|_2 \geq 1$ e $|x|_2 \geq |y|_2$. Allora $|x|_2 > |a|_2$ e dunque $|x + (-a)|_2 = |x|_2 \geq 1$. Inoltre $|y + (-b)|_2$ è uguale o a $|y|_2$ o a $|b|_2$; dunque in ogni caso $|x - a|_2 \geq |y - b|_2$;

$i = 3$) Per ipotesi $|y|_2 \geq 1$ e $|y|_2 > |x|_2$. Allora $|y|_2 > |b|_2$ e dunque $|y + (-b)|_2 = |y|_2 \geq 1$. Inoltre $|x + (-a)|_2$ è uguale o a $|x|_2$ o a $|a|_2$; dunque in ogni caso $|y - b|_2 > |x - a|_2$.

Un altro utile fatto di cui abbiamo bisogno è che l'area di un triangolo nel piano cartesiano con un vertice nell'origine si calcola con una comoda formula a partire dalle coordinate dei 3 punti: sia T un triangolo nel piano cartesiano con vertici $O = (0, 0)$, $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$, allora:

$$Area(T) = \frac{1}{2} |x_P y_Q - x_Q y_P|$$

Per convincercene osserviamo il disegno in Figura 8 (a meno di rinominare i punti possiamo supporre di avere proprio questa rappresentazione).

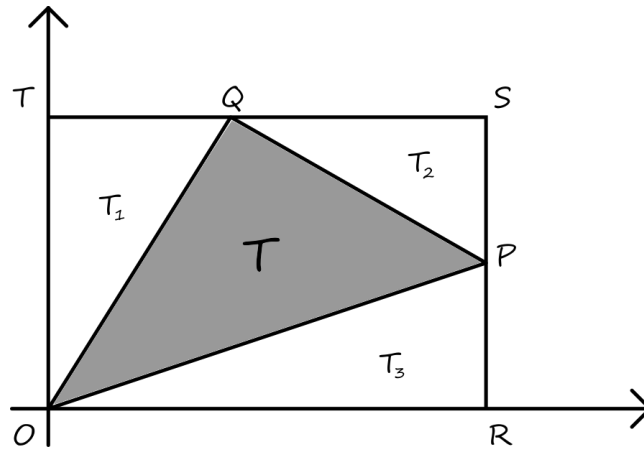


Figura 8: Area del triangolo nel piano cartesiano

Possiamo calcolare l'area del triangolo OPQ come differenza tra l'area del rettangolo $ORST$ e l'area dei triangoli rettangoli T_1, T_2, T_3 :

$$\begin{aligned} Area(T) &= Area(ORST) - Area(T_1) - Area(T_2) - Area(T_3) = \\ &= x_P y_Q - \frac{1}{2} (x_Q y_Q + (y_Q - y_P)(x_P - x_Q) + x_P y_P) = \\ &= \frac{1}{2} (x_P y_Q - x_Q y_P). \end{aligned}$$

4 Il teorema di Monsky

4.1 Il teorema

Prima di arrivare al teorema vero e proprio osserviamo quest'ultimo interessante fatto preliminare:

Proposizione 1. Sia T un triangolo completo in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla colorazione 2-adica. Allora $|Area(T)|_2 > 1$.

Dimostrazione. Grazie al fatto che la colorazione è invariante per traslazione rispetto ai punti di colore 1, possiamo supporre che il triangolo T abbia il vertice di colore 1 nell'origine, P di colore 2 e Q di colore 3 (o viceversa: dato che prendiamo il valore assoluto il risultato non cambierà). Per la formula dell'area che abbiamo ricavato si ha che $Area(T) = \frac{1}{2}|x_P y_Q - x_Q y_P|$. Passando dunque alla norma 2-adica si ha:

$$\begin{aligned} |Area(T)|_2 &= \left| \frac{1}{2} \right|_2 |x_P y_Q - x_Q y_P|_2 = 2|x_P y_Q + (-x_Q y_P)|_2 = \\ &= 2|x_P y_Q|_2 = 2|x_P|_2 |y_Q|_2 \geq 2 > 1 \end{aligned}$$

Nel passaggio dalla prima alla seconda riga abbiamo usato il fatto che, per la colorazione, $|x_P|_2 \geq |y_P|_2$ e $|y_Q|_2 > |x_Q|_2$ e dunque $|x_P y_Q|_2 > |x_Q y_P|_2$. $\square$

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per poter dimostrare che il problema posto all'inizio dell'articolo non ha effettivamente soluzione:

Teorema 2 (Monsky, 1970). *Sia S un quadrato; è possibile triangolare S in m triangoli di area uguale se e solo se m è pari.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che se m è pari, allora è possibile suddividere il quadrato.

Viceversa senza perdita di generalità possiamo assumere che il nostro quadrato sia il effettivamente il quadrato I già considerato nel piano cartesiano. A questo punto supponiamo di avere una suddivisione del quadrato in m triangoli di uguale area con m dispari: vogliamo trovare un assurdo. Coloriamo i vertici della triangolazione mediante la colorazione 2-adica del piano. Come già osservato nel paragrafo 3.3, gli unici 12-lati nel bordo della triangolazione si possono trovare nel lato $\overline{AB}$: dato che $\overline{AB}$ ha i vertici colorati in modo diverso, per il lemma di Sperner unidimensionale sappiamo che ci sono un numero dispari di 12-lati su $\overline{AB}$ e dunque su tutto il bordo. Dunque per il lemma di Sperner applicato al quadrato sappiamo che deve esistere almeno un triangolo completo nella triangolazione scelta! Chiamiamo T tale triangolo.

Adesso l'area totale del quadrato sarà pari a $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 1 \cdot 1 = 1 = m \cdot Area(T)$ in quanto ogni triangolo ha area uguale a quella di T per ipotesi. Ma passando adesso alla norma 2-adica ($|m|_2 = 1$ poiché m è dispari) si ottiene:

$$1 = |1|_2 = |m \cdot Area(T)|_2 = |m|_2 |Area(T)|_2 > 1$$

che è assurdo. $\square$

4.2 Un piccolo problema

Il lettore più attento avrà notato che, in quanto sopra esposto, abbiamo considerato solamente le triangolazioni e non le *suddivisioni*; in particolare abbiamo considerato non valide le suddivisioni come in Figura 9.

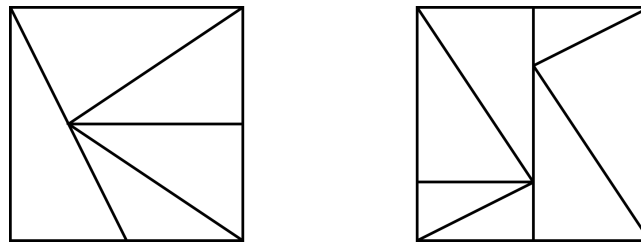


Figura 9: Suddivisioni di un quadrato.

L'argomento che abbiamo utilizzato si può generalizzare anche a queste situazioni, ma la dimostrazione risulta essere un po' più tecnica. Lasciamo ai più temerari una traccia di quello che dobbiamo dimostrare:

1. Ogni retta nel piano colorato non interseca una tra le 3 regioni S_1, S_2, S_3 ;
2. In una qualsiasi suddivisione in triangoli del quadrato I , esiste sempre un triangolo completo;
3. Conclusione come nel teorema di Monsky.

Per quanto riguarda il punto 1 si tratta di giocare con le proprietà della norma 2-adica; il punto 2 è quello un po' più delicato: data una suddivisione, si deve spezzare il quadrato in più poligoni semplici (in maniera opportuna grazie al punto 1) in cui è possibile applicare il lemma di Sperner; a quel punto, con un argomento di parità simile a quelli già visti, si può concludere che esiste un triangolo colorato.

Riferimenti bibliografici

- [1] Su, F.; *Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division*, The American Mathematical Monthly, Vol. 106, (1999), 930-942
- [2] Monsky, P.; *On Dividing a Square into Triangles*, The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 2, (1970), 161-164.
- [3] Aigner, M., Ziegler, G. M.; *Proofs from THE BOOK*, Fifth Edition, Springer, 2014, 151-158.