

Giochi, Grafi e Topologia

Luca Bruni
Febbraio 2022

Origin. Dispensa prodotta in prima istanza per la Settimana Matematica, febbraio 2022.

Overview. Dall'esperienza diretta, giochi e rompicapi diventano occasioni per scoprire grafi, strategie e risultati matematici sorprendenti.

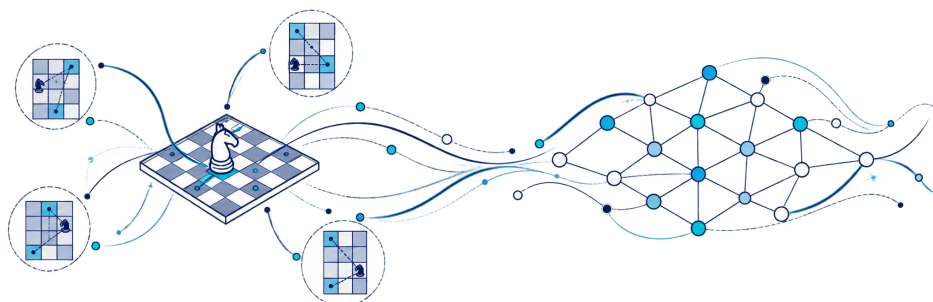
Abstract. Vi è mai capitato di trovarvi nel bel mezzo di una partita di scacchi e non essere sicuri di quale sia la strategia giusta da adottare? Nella maggior parte dei giochi da tavolo la rosa delle azioni possibili è veramente molto ampia; come fare allora a decidere qual è la mossa vincente? In questo laboratorio presenteremo alcuni giochi e li analizzeremo dal punto di vista matematico trovandone le tattiche migliori. Dall'esperienza diretta cercheremo di andare a fondo e dimostreremo risultati sorprendenti!

Last update: 19 agosto 2026.

Menezio (Luca Bruni) · menezio96@gmail.com

Indice

1	Giochi e grafi	2
2	Chomp: giochi combinatori e posizioni vincenti	4
3	Hex: cammini che non possono evitare di incontrarsi	7
4	Giochi del prigioniero: quando la matematica ti salva la vita	11
5	Chiusura	15



1 Giochi e grafi

Un gioco è spesso più facile da capire quando smettiamo per un momento di guardarlo come un insieme di pedine e cominciamo a guardarlo come una rete di possibilità. In queste prime attività l'idea è proprio questa: trasformare una situazione concreta in un grafo, cioè in vertici collegati da archi. Non è un trucco per rendere il problema più astratto; è un modo per renderlo più maneggevole.

Definizione 1. Un grafo è una coppia (V, E) : V è un insieme di vertici e E è un insieme di collegamenti, o archi, tra coppie di vertici. Quando non ci interessa la direzione del collegamento scriviamo, per esempio, $\{u, v\} \in E$; quando la direzione conta, come nel grafo delle mosse di un gioco, scriviamo $(u, v) \in E$.

1.1 Il gioco dei quattro cavalli

Immaginate di avere quattro cavalli e la seguente, insolita, scacchiera.

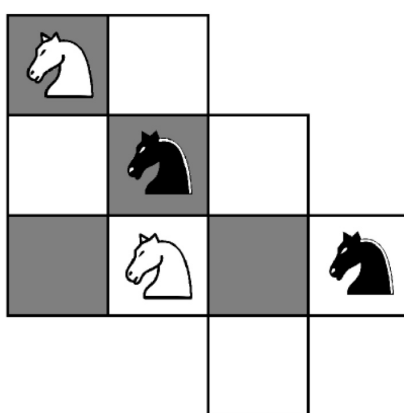


Figura 1: La scacchiera del gioco dei quattro cavalli.

Lo scopo è portare i cavalli neri dove sono quelli bianchi e viceversa. Le regole sono semplici:

- il cavallo si muove come nel gioco degli scacchi;
- può muoversi soltanto su una casella vuota;
- due cavalli non possono stare nella stessa casella.

Domande guida

1. È possibile risolvere il gioco?
2. Se la risposta è sì, qual è il numero minimo di mosse?
3. Bonus: è possibile alternare mosse bianche e nere?

Prima di andare avanti con la soluzione, vale la pena fare tentativi. Non è tempo perso: spesso, provando, si scoprono regolarità che poi permettono di costruire una strategia. Il problema è che il movimento “a L” del cavallo e la forma stretta della scacchiera rendono difficile tenere tutto a mente.

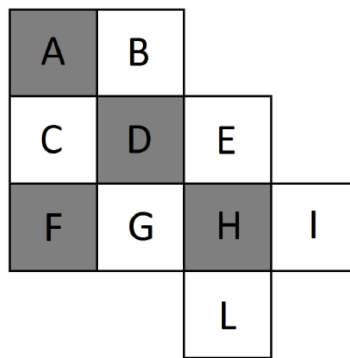


Figura 2: La scacchiera con le caselle etichettate.

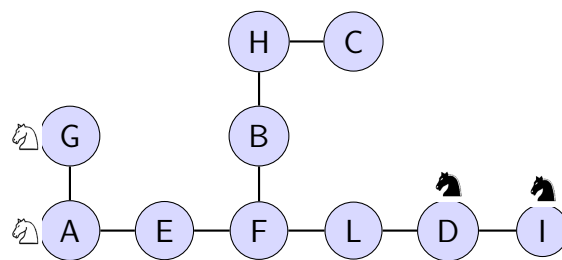


Figura 3: Il grafo dei movimenti possibili dei cavalli.

L'idea: rendere lineare la mossa del cavallo

Etichettiamo le caselle come in figura e costruiamo un grafo. I vertici sono le caselle; un arco unisce due vertici quando un cavallo può passare dall'una all'altra in una sola mossa.

Sul grafo il movimento non è più una L: è un passo lungo un arco. La soluzione non appare magicamente, ma è molto più facile da cercare. Per esempio i cavalli bianchi possono passare per *B* e *H*, lasciare spazio ai cavalli neri e poi occupare le loro posizioni. Una ricerca sistematica sul grafo mostra che il numero minimo di mosse è 26.

Attività in aula

Provate a segnare una configurazione con quattro pedine sul grafo e a registrare soltanto la sequenza di lettere visitate. Quali informazioni della scacchiera originale avete eliminato? Quali, invece, avete conservato esattamente?

1.2 Metti vicino quello smartphone

Diciamo che due cellulari si toccano quando condividono almeno una parte di faccia. Con quattro cellulari, possiamo disporli in modo che ciascuno tocchi tutti gli altri tranne uno?

Una soluzione è farli diventare i quattro lati di un quadrilatero più grande.

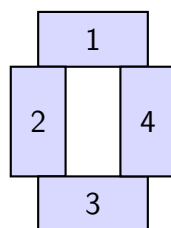
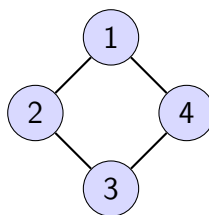


Figura 4: Una disposizione possibile per quattro smartphone.

La stessa situazione si traduce in un grafo: cellulari = V , “si toccano” = E . Il grafo è un ciclo di quattro vertici.



Ora cambiamo domanda. Con cinque cellulari ciascun cellulare ha davanti a sé quattro possibili compagni: non può toccare sé stesso e, per rispettare la regola, deve non toccare esattamente uno degli altri quattro. Deve quindi toccarne esattamente 3. Nel grafo avremmo cinque vertici, tutti di valenza 3.

Definizione 2. La valenza di un vertice è il numero di archi che entrano in quel vertice. La valenza totale di un grafo è la somma delle valenze di tutti i vertici.

Se sommiamo le valenze uno smartphone alla volta, otteniamo $3 + 3 + 3 + 3 + 3$: stiamo contando tre contatti per ciascuno dei cinque cellulari. Ogni contatto, però, è stato contato due volte, perché un contatto collega due cellulari. Perciò la somma delle valenze di qualunque grafo è sempre due volte il numero degli archi e deve essere pari. Nel nostro problema dovrebbe essere

$$5 \cdot 3 = 15,$$

che è dispari. Dunque non esiste un tale grafo e il gioco con cinque cellulari non si può risolvere.

Domande guida

Con n smartphone, quando è possibile disporli in modo che ciascuno tocchi tutti gli altri tranne uno? Il passaggio decisivo non è disegnare tante disposizioni: è capire quale valenza deve avere ogni vertice.

2 Chomp: giochi combinatori e posizioni vincenti

Chomp è un gioco semplice da raccontare e difficile da esaurire. Si parte da una tavoletta di cioccolato rettangolare $m \times n$. Il quadratino in basso a sinistra è avvelenato: chi lo mangia perde.

Un giocatore sceglie un quadratino e, avendo una bocca “rettangolare”, deve mangiare tutti i quadratini alla sua destra, sopra di lui, o in entrambe le direzioni. A ogni turno deve essere mangiato almeno un quadratino.

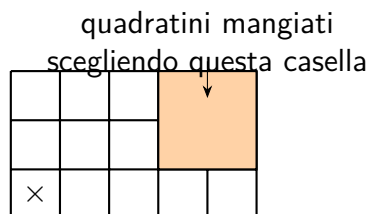


Figura 5: Un esempio di mossa nel Chomp. La croce indica il quadratino avvelenato.

Attività in aula

I partecipanti al laboratorio vengono messi a coppie e si chiede loro di giocare partite con una configurazione iniziale $m \times n$ a piacere.

2.1 Configurazioni e grafo del gioco

Vogliamo rispondere alla seguente domanda: *esiste una strategia vincente per il primo o per il secondo giocatore?*

Definizione 3. Un gioco combinatorio finito è un gioco:

- **deterministico:** ha un numero finito di configurazioni e ogni configurazione può apparire al massimo una volta durante una partita;
- **non esiste la mossa nulla;**
- **non è possibile pareggiare;**
- **la configurazione con cui stiamo giocando è sempre nota**

Definizione 4. Il grafo associato al gioco ha per vertici le configurazioni e disegna una freccia da una configurazione all'altra quando è possibile passare dalla prima alla seconda con una mossa.

Osservazione 1. Una configurazione del Chomp è una delle forme che può assumere la tavoletta.

Per esempio, per una tavoletta 2×3 alcune delle configurazioni e delle mosse possibili sono le seguenti.

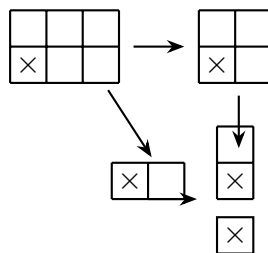


Figura 6: Un frammento del grafo associato al Chomp 2×3 .

Le frecce puntano sempre verso tavolette più piccole, quindi non si può tornare indietro: il gioco è dunque un gioco combinatorio finito.

2.2 Configurazioni (P) e (V)

Definizione 5. In un gioco combinatorio finito, definiamo due tipi di configurazione:

- una configurazione è perdente, o (P) , se non ci sono più mosse disponibili o se ogni mossa compiuta da quella posizione lo manda in una combinazione vincente (V) ;
- una configurazione è vincente, o (V) , se esiste una mossa che raggiunge una configurazione perdente.

Osservazione 2. Nel Chomp esiste una configurazione perdente: quella con il solo quadratino avvelenato rimasto.

Teorema 1. In un gioco combinatorio finito ogni configurazione è (P) oppure (V) .

Dimostrazione. Le configurazioni finali sono (P) , perché il giocatore che deve muovere non ha una mossa che eviti di perdere. Partiamo da queste configurazioni e risaliamo il grafo. Una configurazione è (V) se ha almeno una freccia verso una configurazione (P) ; è invece (P) se tutte le sue frecce

vanno verso configurazioni (V) . Poiché il grafo è finito e non ha cicli, il procedimento termina e assegna un'etichetta a ogni vertice. ma come si generano effettivamente queste etichette? Definiamo:

$$S(0) = \{\text{configurazioni finali}\}$$

e

$$S(d) = \{\text{configurazioni per le quali esiste un percorso lungo } d \text{ che arriva ad uno stato finale ed ogni altro perc}$$

Osserviamo due fatti importanti:

1. Ogni configurazione sta in un certo $S(n)$ per qualche n ;
2. Gli $S(n)$ sono a due a due disgiunti: per costruzione, se uno stato s sta in $S(a) \cap S(b)$ con $a < b$ allora per il primo contenimento non ha cammini lunghi più di a per arrivare allo stato finale, ma per il secondo contenimento ne ha almeno uno lungo $b > a$ assurdo.

Inoltre si può dimostrare che $S(n) \neq \emptyset$ per ogni n (provare per esercizio).

A questo punto siamo pronti per assegnare una etichetta (V) o (P) a ogni stato. Sia $s \in S(1)$. Se da s è possibile raggiungere una (P) , allora etichetto s con (V) , altrimenti con (P) .

Sia $t \in S(2)$. Ogni mossa che parte da t va per costruzione in $S(1)$ o in $S(0)$. Visto che ho già etichettato tutto $S(0)$ e $S(1)$ posso etichettare anche t .

Si procede poi banalmente per induzione. □

Corollario 1. *In ogni gioco combinatorio finito esiste una strategia vincente per il primo o per il secondo giocatore.*

La configurazione iniziale è infatti o (P) oppure (V) . Nel primo caso vince il secondo, nel secondo caso vince il primo.

2.3 Il pivot e il primo giocatore

Definizione 6. Sia $I = \{\text{configurazioni del gioco che si possono raggiungere con una sola mossa dalla configurazione iniziale}\}$. Chiamiamo pivot una configurazione $m \in I$ tale che per ogni mossa fatta da m , la configurazione successiva è di nuovo in I .

Teorema 2. *In un gioco combinatorio finito con un pivot, il primo giocatore ha sempre una strategia vincente.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente la configurazione iniziale o è (V) o è (P) . Se è (V) , tutto ok. Voglio dimostrare che non può essere (P) . Se lo fosse e c'è un pivot, allora tale pivot deve essere obbligatoriamente etichettato con (V) (altrimenti il primo giocatore avrebbe vinto). Dal pivot, per definizione, è possibile spostarsi solamente su configurazioni raggiungibili fin dall'inizio che quindi sono (V) . Ma allora il primo giocatore si trova di nuovo in una posizione vincente alla sua prossima mossa e questo è assurdo!

Pertanto, l'esistenza di un pivot assicura che l'etichetta della configurazione iniziale è (V) . □

Corollario 2. *Nel Chomp esiste una configurazione pivot e pertanto il giocatore 1 ha sempre una strategia vincente*

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che la mossa "mangio il quadratino in alto a destra" ti porta in una configurazione pivot. □

Nota

Il teorema garantisce che una strategia vincente esiste, ma non fornisce automaticamente una lista di mosse ottimali per ogni tavoletta. Esistenza di una strategia e costruzione esplicita della strategia sono due problemi diversi.

Attività in aula

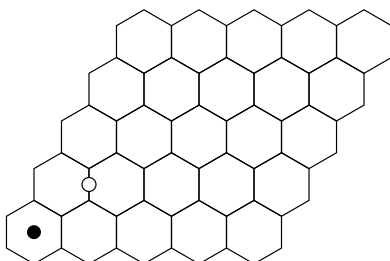
In due casi particolari è possibile trovare esplicitamente la strategia vincente. Al lettore la sfida:

- Tavoletta di cioccolato $n \times n$
- Tavoletta di cioccolato $n \times 2$

Perché la simmetria può aiutare nel caso $n \times n$?

3 Hex: cammini che non possono evitare di incontrarsi

Hex fu inventato due volte: da *Piet Hein* durante la seconda guerra mondiale e, indipendentemente, da *John Nash*. La scacchiera è un rombo formato da esagoni (tipicamente di grandezza 11×11). I due giocatori usano pedine bianche e nere; ciascuno cerca di collegare le due sponde del proprio colore con una catena di pedine adiacenti per lato. Più in dettaglio ogni giocatore ha due sponde; a turno i giocatori posizionano una pedina del proprio colore (o bianca o nera) in una casella. Lo scopo è costruire un percorso del proprio colore che connette le sponde opposte fatto da pedine adiacenti (cioè che si toccano per almeno un lato).



Osservazione 3. ▪ Il grafo associato alle posizioni dell'Hex è finito. Per esercizio si potrebbero contare il numero di configurazioni di una partita in una scacchiera $n \times n$.

- Il grafo associato all'Hex NON ha cicli. Infatti, non potendo togliere pedine già inserite, non si potrà tornare a una configurazione precedente
- Il gioco terminerà, banalmente quando la scacchiera non ha più caselle libere

A questo punto, se non esistesse la patta, per il Corollario ?? esisterebbe una strategia vincente. Il nostro scopo è quindi cercare di capire se esistono configurazioni di patta oppure no.

3.1 Perché non esiste la patta

Supponiamo di riempire completamente la scacchiera e chiediamoci due cose

1. è possibile che NON ci sia un percorso vincente? Se la risposta è NO, allora l'Hex non ammette patta: o il gioco finisce prima dell'inserimento dell'ultima pedina, o con l'inserimento dell'ultima.

2. è possibile che esistano contemporaneamente un percorso vincente bianco e uno nero?¹

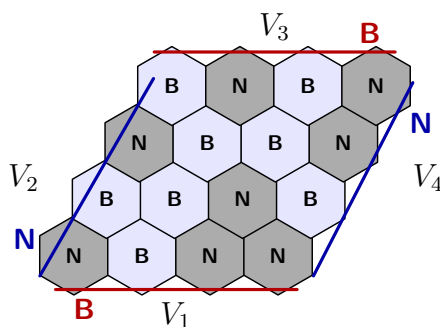
Attività in aula

Analizzare i casi piccoli e capire cosa succede. Analizzare in particolare i casi 2×2 , 3×3 e 4×4 . Nella griglia 5×5 inizia già a diventare molto complicata la situazione.

Rispondiamo alla domanda sull'esistenza di un percorso vincente; di nuovo rientrano in gioco i grafi.

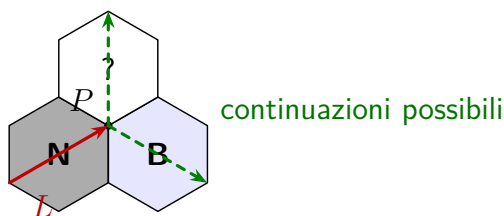
Teorema 3 (Teorema dell'Hex). *Sia n un numero intero positivo e consideriamo una scacchiera da Hex $n \times n$. Supponiamo di avere x pedine bianche e $n^2 - x$ pedine nere con $0 \leq x \leq n^2$ e di usarle per riempire la scacchiera. In qualunque modo vengano disposte le pedine, esiste un percorso vincente per il bianco o per il nero*

Dimostrazione. Aggiungiamo quattro archi come in figura; quello in basso sarà V_1 . Riempiamo completamente la scacchiera di B e N e chiamiamo bianche le caselle con B e nere quelle con N . Consideriamo nere e bianche le sponde grosse della scacchiera.



Diamo un algoritmo per costruire un percorso che parte da V_1 . Il percorso correrà lungo i lati delle caselle o della scacchiera. Questo cammino ci darà un percorso vincente a livello di caselle.

Regola. Si parte da V_1 e si arriva nella scacchiera. Supponiamo di aver percorso un lato L e di essere in un vertice P , non toccato in precedenza e diverso da V_2, V_3, V_4 . Gli altri due lati che arrivano in P non sono stati percorsi (altrimenti saremmo già passati da P). Proseguiamo allora scegliendo quello che separa una casella bianca da una nera. Se siamo in V_2, V_3 o V_4 , allora il cammino è finito.



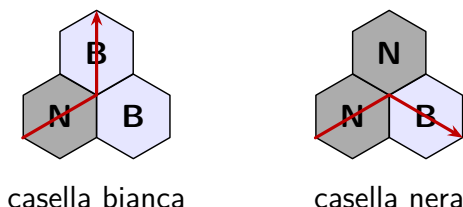
Precisazione. Se siamo sul bordo non cambia nulla e percorriamo i lati del bordo.

¹In realtà rispondere a questa domanda è inutile al fine di capire se l'Hex finisce in patta o no. Mettendo le pedine a turno, uno dei due concluderà prima il proprio percorso.

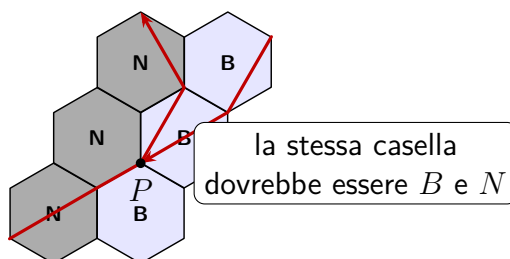
Aspetti da chiarire.

- (a) Se raggiungiamo P , non toccato in precedenza, siamo sicuri di avere una sola scelta valida per andare avanti?
- (b) Non può capitare di ripassare da un vertice già visitato? In quel caso cosa dobbiamo fare?

Per il punto (a), se siamo in P dal lato L , la casella ancora da determinare sarà per forza bianca o nera. Questo determina uno e un solo percorso disponibile. Funziona analogamente sul bordo della scacchiera.



Per il punto (b), mostriamo che il cammino non può tornare nello stesso vertice. Supponiamo per assurdo che, dopo un po' di passi sempre su vertici diversi, percorriamo un lato L che ci fa tornare in un vertice che abbiamo già occupato. La situazione è la seguente.



Ma allora nella casella indicata dovrebbero andare sia una pedina bianca sia una pedina nera, perché il percorso era già passato da quel vertice. Il cammino è dunque ben definito e siamo al top.

Ora che abbiamo una buona definizione della costruzione del cammino, dato che i vertici sono finiti il cammino dovrà terminare in qualche vertice. Non può essere un vertice della scacchiera o del bordo, perché da lì va sempre avanti. Il punto di arrivo è quindi un vertice tra V_2 , V_3 e V_4 .

Vediamo adesso come, a partire dal grafo, si costruisce il cammino vincente per il Bianco o per il Nero. Analizziamo i vari casi.

Supponiamo che il cammino che parte da V_1 termini in V_4 . In questo caso c'è un percorso vincente per il Bianco. Supponiamo che il cammino abbia N lati e numeriamoli

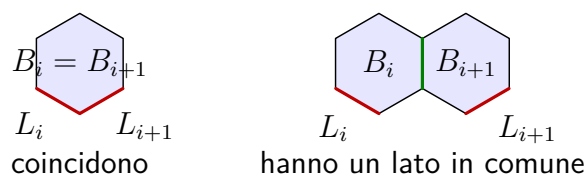
$$L_1, \dots, L_N.$$

Per costruzione ognuno di questi lati separa una casella bianca da una nera. Chiamiamo B_i la casella bianca separata dal lato L_i e ci troviamo una sequenza di caselle bianche, eventualmente con ripetizioni,

$$B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_k, \dots, B_N.$$

Notiamo che B_1 è la sponda bianca e B_N quella dall'altra parte. Dato che le sponde sotto e sopra sono toccate, esiste j tale che B_j è l'ultima volta che viene toccata la sponda in basso e B_{j+1} è la prima volta che viene toccata la sponda in alto.

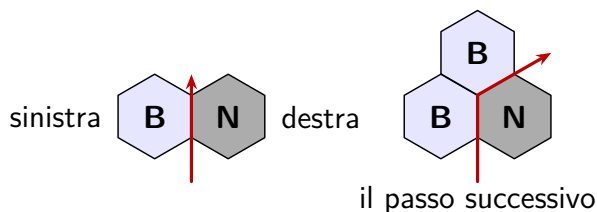
Consideriamo quindi il cammino $B_1, \dots, B_N$. Questo è un percorso vincente per il giocatore Bianco: queste sono caselle bianche che partono da una sponda e arrivano all'opposta. Resta da far vedere che è "connesso", cioè che B_i e B_{i+1} coincidono o hanno un lato in comune. Questo è ovvio per costruzione.



Osservazione 4. Questo ragionamento non ci dà un cammino vincente per il Nero, perché, dato che terminiamo in V_4 , i lati L_1 e L_N terminano alla stessa sponda. E negli altri casi?

Se il percorso che parte da V_1 termina in V_2 , allora con lo stesso ragionamento troviamo un percorso per il Nero prendendo $N_1, \dots, N_n$.

Cosa accade invece se il cammino termina in V_3 ? Il cammino che parte da V_1 non può terminare in V_3 . L'osservazione chiave è che, se percorriamo il cammino a partire da V_1 , allora ci lasceremo sempre una casella bianca alla nostra sinistra e una nera a destra. Infatti, al passo iniziale, cioè nel primo pezzo del cammino costruito, è vero; poi si procede per induzione.



Dato che abbiamo coperto tutti i casi, esiste sempre un cammino. □

Corollario 3. Dato $n > 0$, una partita di Hex non ammette patta. Dunque Hex è un gioco combinatorio finito.

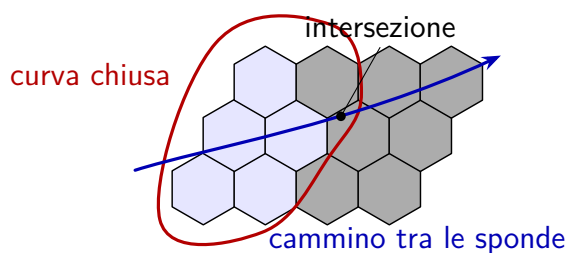
Si può dimostrare che il teorema del punto fisso di Brouwer è equivalente al teorema dell'Hex. Per dettagli: "Giochi e percorsi matematici", Giaffei, Perenzze, Dolnecchi.

Due collegamenti con la topologia

Abbiamo fatto vedere che un vincitore esiste sempre, ma è unico? Più precisamente, esiste un riempimento della scacchiera in modo che sia le sponde nere che quelle bianche siano collegate? La risposta è no, ma è un teorema.

Teorema 4 (Curve di Peano–Jordan). Una curva semplice chiusa nel piano divide il piano in due insiemi connessi per archi: un "dentro" limitato e un "fuori" illimitato. La curva è contorno di entrambe le regioni.

Nell'Hex il bordo costruito per separare le due regioni si deve per forza attraversare. E quindi c'è un vincitore.



Un altro teorema famoso in topologia è il seguente.

Teorema 5 (Teorema del punto fisso di Brouwer). Sia $f: Q \rightarrow Q$ una funzione continua, con Q quadrato chiuso. Allora esiste $x \in Q$ tale che $f(x) = x$, cioè f ha un punto fisso.

Si può dire che uno dei due giocatori ha una strategia vincente? Sì.

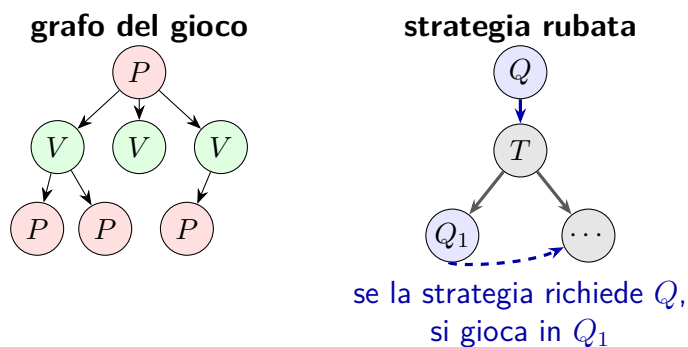
Teorema 6. *Nel gioco Hex chi comincia ha una strategia vincente.*

Dimostrazione. Dato che è un gioco combinatorio finito, allora c'è un vincitore. Prendiamo il grafo associato al gioco e supponiamo per assurdo che la configurazione iniziale sia etichettata con una P . Questo vuol dire che ogni mossa del Bianco porta a una V e il Nero avrà, a ogni turno, una mossa che porta su P .

Il Bianco può “rubare” la strategia del Nero.

Informalmente.

1. Il Bianco mette la pedina su Q .
2. Il Nero mette la pedina su T .
3. Il Bianco dimentica la pedina in Q e fa finta di essere il Nero. In particolare, fa finta che la prima mossa sia quella in T e gioca da Nero.
- 4.



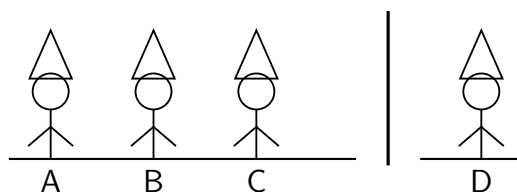
□

4 Giochi del prigioniero: quando la matematica ti salva la vita

Per quest'ultima sezione vogliamo proporre un po' di giochi “detti” del prigioniero, che sono giochi di logica che permettono di salvarsi nelle situazioni più disperate.

4.1 Gioco 1: quattro cappelli

Quattro condannati a morte hanno la possibilità di salvarsi. Il Boia mostra loro quattro cappelli, due bianchi e due neri. Dopo di che li benda, pone su ognuno di loro un cappello e li mette come in figura.



Dopo di che fa partire un cronometro di cinque minuti. Se uno di loro dice esattamente il colore del proprio cappello si salvano. Come si fa?

Soluzione.

- Se A vede davanti a sé due cappelli uguali dice l'opposto.
- Se A vede due cappelli diversi non potrà avere la certezza del suo cappello. Allora B , osservando che A è zitto, capisce che A è indeciso e quindi davanti a lui c'è un cappello di colore diverso.

Idea. Solo A e B hanno informazioni in più rispetto al sapere che ci sono solo due cappelli. Quindi ci si deve concentrare su di loro.

4.2 Gioco 2: bivio mortale

Un esploratore in Africa giunge ad un bivio, non sa quale via prendere per andare al villaggio ma poi vede lì vicino un indigeno. Egli sa che quella è una zona abitata da bugiardi che dicono sempre il falso e da sinceri che dicono sempre il vero e che rispondono solo Sì o No. Il viaggiatore si ferma dunque e riflette un po', poi fa una sola domanda. Dalla risposta egli sa quale è la strada da prendere. Quale è la domanda?

Una possibile domanda da fare è la seguente:

"Se tu fossi una guardia del tipo opposto al tuo, come risponderesti alla domanda: 'la porta sinistra mi fa salvare la vita?' "

Analizziamo cosa succede. Chiamiamo O una guardia onesta e B una guardia bugiarda.

Caso 1: la porta sinistra è quella giusta.

- Se ho davanti O , la risposta che ottengo è un No perché dice la verità: un furfante risponde No alla domanda.
- Se ho davanti B , la risposta che ottengo è un No. Dato che deve immaginare di essere cavaliere, la verità sarebbe dire Sì, ma lui è un furfante e dunque dice No.

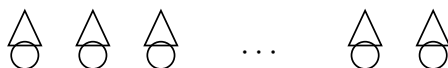
Caso 2: la porta sinistra è quella sbagliata.

- Se ho davanti O , la risposta che ottengo è Sì: un furfante mentirebbe e pertanto dice Sì.

Dato che furfante e cavaliere danno la stessa risposta alla domanda non ci sono ambiguità. Se ottengo No vado nella porta a sinistra; se ottengo Sì vado nella porta a destra (e sono salvo).

4.3 Gioco 3: dieci cappelli bianchi o neri

Come al solito dieci condannati a morte. Viene posto sulla loro testa un cappello o bianco o nero e vengono disposti così:



Cioè tutti vedono i successivi. A partire dal primo da sinistra e consecutivamente dicono un colore. Se il colore detto coincide col cappello abbiamo salva la vita. I condannati si possono accordare prima su una strategia. Quanti se ne salvano?

Idea. Sfruttare la “parità” dei cappelli, cioè contare e tenere traccia di quanti cappelli bianchi e neri ci sono.

Segue il seguente schema: il primo dice B se il numero di B davanti a sé è dispari, dice N se il numero davanti a sé di B è pari. Lui purtroppo può morire.

A questo punto il secondo ottiene una informazione cruciale. Se è stato detto B , allora devono esserci un numero di cappelli bianchi dispari, ma lui li vede tutti e, se sono pari, significa che lui ce l'ha bianco; se sono dispari, lui ce l'ha nero. Se invece è stato detto N , allora si ragiona allo stesso modo.

Adesso il terzo sa che il secondo ha individuato. A questo punto confronta le due informazioni che ha:

1. in partenza so che i B sono dispari oppure pari;
2. se il secondo ha detto B , so che i B adesso hanno parità diversa da quanto scritto in (1); se ha detto N , so che i B hanno la stessa parità di partenza.

Dunque il terzo ha le stesse informazioni del secondo e dunque sa rispondere correttamente al colore del cappello davanti a sé. Procedendo in questo modo tutti i successivi al primo indovino il loro colore e si salvano tutti.

E se il Boia fosse più cattivo e dunque considerasse cappelli dei più svariati colori? Se le persone non fossero dieci?

4.4 Gioco 4: N cappelli di k colori

Stesso gioco di prima, ma adesso le persone sono N e i cappelli possono essere di k colori diversi. Qual è una strategia ottimale? Si salvano tutti lo stesso tranne il primo?

Cerchiamo di matematizzare la situazione. Invece che parlare di colori, diamo un numero ad ogni colore. I colori sono dunque

$$0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Nel caso di due colori, $0 = N$ e $1 = B$.

A questo punto la stringa dei cappelli diventa una cosa del tipo

$$i_1, i_2, \dots, i_N, \quad i_j \in \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

Descriviamo adesso la strategia. i_1 riesce a vedere tutto. Può quindi fare la somma di tutti i cappelli successivi. Chiama

$$S_1 = i_2 + \dots + i_N.$$

A priori S_1 è un numero grande e non corrisponde a un colore. Però, se facciamo la divisione di S_1 per k e prendiamo il resto, questo resto sarà un numero tra 0 e $k-1$. In particolare

$$S_1 = kq_1 + r_1, \quad r_1 \in \{0, \dots, k-1\}.$$

Il primo della fila dice quindi r_1 e, ahimè, potrebbe morire.

Il secondo adesso è in questa situazione: conosce r_1 e conosce

$$S_2 = i_3 + \dots + i_N.$$

Con queste informazioni può trovare il numero i_2 ? Considero la sottrazione

$$\begin{aligned} r_1 - S_2 &= S_1 - kq_1 - S_2 \\ &= i_2 + \dots + i_N - kq_1 - i_3 - \dots - i_N \\ &= i_2 - kq_1. \end{aligned}$$

Ma allora, se divido il numero $r_1 - S_2$ per k e prendo il resto, tale resto sarà proprio i_2 , che è il colore del cappello sulla testa del secondo. Quindi il secondo si salva dicendo il cappello giusto.

Ma a questo punto il terzo conosce:

1. r_1 ;
2. i_2 ;
3. $S_3 = i_4 + \dots + i_N$.

Ma allora, calcolando

$$\begin{aligned} r_1 - i_2 - S_3 &= S_1 - q_1 k - i_2 - S_3 \\ &= i_3 - q_1 k, \end{aligned}$$

e prendendo il resto modulo k , si trova i_3 .

Induttivamente l' n -esimo conosce:

1. r_1 ;
2. $i_2, \dots, i_{n-1}$;
3. $S_n = i_{n+1} + \dots + i_N$.

Allora

$$r_1 - i_2 - \dots - i_{n-1} - S_n = i_n - q_1 k$$

e ha trovato i_n . Tutti sono salvi tranne il primo, che ha $1/k$ di probabilità di salvarsi (ma fa salvare tutti gli altri).

Esercizio. Osservare che è la stessa tattica usata nel caso di due cappelli.

4.5 Gioco 5: cappelli infiniti di infiniti colori

Cosa accade se lo stesso problema lo facciamo con infiniti cappelli e infiniti colori? Il problema diventa materialmente impossibile, ma vale un teorema che non dimostriamo.

Teorema 7. *Esiste una strategia che permette di far morire solo un numero finito di persone.*

Schizzo. Si prende l'insieme

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{\text{stringhe di infiniti numeri in } \mathbb{N}\}.$$

Si quozienta $\Sigma^{\mathbb{N}}$ per la relazione di equivalenza

$$s_1 \sim s_2 \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > n_0, s_1(n) = s_2(n).$$

Considero l'insieme $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$, ovvero per ogni classe prendo un rappresentante.

Tutti i condannati vedono il rappresentante in cui sono (conoscono quanto detto prima e vedono la coda). Dicono il colore del rappresentante in $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ in cui si trovano. A un certo punto tutti indovinano: se frequentemente non indovinano, allora non sono nella classe di equivalenza giusta, ma queste sono definitivamente costanti.

Un po' vago scritto così ...

4.6 Gioco 6. Trova la carta giusta

Due condannati a morte hanno la possibilità di salvarsi. Il Boia spiega un gioco e lascia loro il tempo di concordare una strategia.

- Il Boia fa entrare il primo in una stanza e dispone un mazzo di 40 carte in fila, scoperte, sul tavolo, nell'ordine che preferisce.
- Il primo può effettuare uno scambio tra due carte oppure lasciare tutto com'è.
- Le carte vengono coperte; il primo esce ed entra il secondo.
- Il Boia dice: "Puoi girare al più 20 carte nell'ordine che preferisci. Se trovi il 2 di Bastoni siete liberi."

È più comodo numerare le carte da 1 a 40. Scriviamo i_s per la carta che si trova in posizione s . Il primo condannato guarda il mazzo come una permutazione e costruisce dei cicli: parte dalla posizione 1, legge i_1 , va alla posizione i_1 , poi alla posizione i_{i_1} e così via.

$$(i_1, i_{i_1}, i_{i_{i_1}}, \dots).$$

Prima o poi il percorso torna a una posizione già vista e forma un ciclo. Ripetendo il procedimento con le carte non ancora usate, le quaranta posizioni si spezzano in cicli disgiunti.

Osservazione 5. *Se il secondo condannato parte dalla posizione indicata dalla carta richiesta e poi segue la carta trovata, rimane nel ciclo che contiene quella carta. Se il ciclo ha lunghezza al più 20, trova la carta richiesta entro 20 aperture.*

Se tutti i cicli hanno lunghezza al più 20, il primo non fa niente. Se invece c'è un ciclo di lunghezza $t > 20$, quel ciclo è l'unico troppo lungo. Scriviamolo come

$$(j_1, j_2, \dots, j_t), \quad 20 < t \leq 40.$$

Il primo sceglie una carta circa a metà del ciclo,

$$k = \begin{cases} j_{t/2} & \text{se } t \text{ è pari,} \\ j_{(t+1)/2} & \text{se } t \text{ è dispari,} \end{cases}$$

e scambia la carta k con la carta j_t . Lo scambio spezza il ciclo lungo in due cicli, entrambi di lunghezza al più 20. A quel punto la strategia del secondo funziona come nel caso precedente.

Attività in aula

Disegnate un ciclo di lunghezza 12 e fate lo scambio indicato. In quanti cicli si divide? Quali sono le loro lunghezze? Ripetete con un ciclo di lunghezza 13.

5 Chiusura

I giochi di queste dispense sono molto diversi in superficie: cavalli, cellulari, tavolette di cioccolato, esagoni, cappelli e carte. Le idee che li rendono affrontabili, però, tornano continuamente:

- modellizzare una situazione con un grafo;
- distinguere posizioni vincenti e perdenti;
- usare un'invariante, come la parità o la valenza totale;
- codificare informazione in una scelta apparentemente semplice;
- spezzare un problema grande in pezzi controllabili.